PROJEKTIVE UND NICHTEUKLIDISCHE GEOMETRIE

VON

DR. FRIEDRICH SCHILLING
PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE DANZIG

IN ZWEI BÄNDEN

ERSTER BAND

PROJEKTIVE GEOMETRIE

IN ANALYTISCHER BEHANDLUNG NEBST EINEM EINBLICK IN DIE GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE

1931
LEIPZIG UND BERLIN
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER

PROJEKTIVE GEOMETRIE

IN ANALYTISCHER BEHANDLUNG NEBST EINEM EINBLICK IN DIE GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE

VON

DR. FRIEDRICH SCHILLING
PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE DANZIG

MIT 157 FIGUREN

BG

1931
LEIPZIG UND BERLIN
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER

MEINER LIEBEN FRAU

GEWIDMET

Vorwort zu Band I und II.

Was kann der Mensch im Leben
mehr gewinnen, als daß sich Gott —
Natur ihm offenbare? Goethe.

„Lieber Herr Kollege! Indem ich für Ihren Glückwunsch zu meinem Geburtstage bestens danke, freut es mich insbesondere zu hören, daß Sie auch Ihrerseits zur Verbreitung der projektiven Auffassung der nichteuklidischen Geometrie beitragen wollen. Es muß doch endlich gelingen, die Gleichgültigkeit oder Kurzsichtigkeit des Publikums zu überwinden. Mit vielen Grüßen Ihr alter Klein."

Dies Schreiben meines hochverehrten Lehrers Felix Klein ist die Antwort auf meinen Glückwunsch zu seinem 75. Geburtstage im Jahre 1924. In meinem Briefe hatte ich den Gedanken ausgeführt, meinerseits eine Einführung in die von Klein mit genialem Blick geschaffene nichteuklidische Geometrie in projektiver Behandlung zu verfassen, um weitesten Kreisen der Mathematiker und der Physiker, insbesondere auch den Studienräten an unseren höheren Schulen und den Studierenden, einen möglichst einfachen Zugang zu dieser wunderbaren neuen Welt zu eröffnen, die ja besonders auch die Elementarmathematik der Schule von einem höheren Gipfel aus zu überblicken und in ihren Einzelheiten richtig zu würdigen gestattet und auch die geometrische Grundlage für das Verständnis der Relativitätstheorie bildet.[1])

Mein Buch ist aus den Vorlesungen hervorgegangen, die ich in den Jahren 1923—24 und 1927—28 an unserer Technischen Hochschule gehalten habe. Die erste Einführung in die nichteuklidische Geometrie verdanke ich selbst Felix Klein, als dessen Assistent ich im W.-S. 1889—90 und im S.-S. 1890 seine Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie ausgearbeitet und deren autographische Herausgabe ausgeführt habe.[2])

Es gibt ja nun noch einen anderen Weg, um zur nichteuklidischen Geometrie unseres wirklichen Raumes zu gelangen, den Weg, den schon Bolyai und Lobatschefskij gewandert sind, der aber auch schließlich, besonders wenn es

1) Man sehe deswegen z. B. H. Reichenbach, Atom und Kosmos, das physikalische Weltbild der Gegenwart, Berlin 1930.

2) Vgl. auch das umfassende Werk: F. Klein, Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie, neu bearbeitet von W. Rosemann, Berlin 1928, das zum weiteren Studium hiermit empfohlen sei.

sich um höhere Untersuchungen handelt, in den Kleinschen Weg einmündet.[1]) Dieser andere Weg benutzt im wesentlichen die Methode der euklidischen Elementarmathematik, welch' letztere ja auch ihre Fortsetzung in der kartesischen analytischen Geometrie findet. Beide Wege zur nichteuklidischen Geometrie haben ihre ausgeprägte Eigenart und ihr besonderes Interesse und bauen sich ja auch auf denselben Axiomen auf. Der Weg, den wir nun wandern wollen, führt zunächst zum Aufbau der projektiven Geometrie ohne Benutzung vom Parallelenaxiom und von den anderen metrischen Axiomen, den Axiomen der Bewegung oder der Kongruenz. Dieser eigenartige Aufbau der projektiven Geometrie dürfte aber auch für sich besonderes Interesse beanspruchen.

Man hat gelegentlich wohl den Ideen Kleins vorgeworfen, daß bei der Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie doch die euklidische Geometrie benutzt werde.[2]) Unsere Entwicklungen werden mit aller Deutlichkeit zeigen, daß dies nicht zutreffend ist.

Der mit der Literatur bereits vertraute Leser wird gewiß finden, daß nicht nur fast überall neue Darstellungsarten notwendig waren, um den leicht gangbaren Weg zu schaffen, sondern daß auch vielfach neue Ergebnisse gewonnen sind. Ich weise beispielsweise im ersten Bande hin auf die einfache Einführung der uneigentlichen Elemente mit Hilfe des Desarguesschen Satzes, sowie den Beweis des Satzes 3a im § 10 bei der Einführung dyadisch-irrationaler Koordinatenzahlen, sowie die neue Abbildung der projektiven Ebene auf eine geschlossene, singularitätenfreie Fläche im begrenzten Gebiet, auf das Erweiterungsaxiom und die biprojektive Ebene. Aus dem zweiten Bande mag hier hervorgehoben werden die sehr einfache Art, den absoluten Kegelschnitt in der elliptischen oder hyperbolischen Geometrie zu gewinnen, die Einführung der Hauptweltkonstanten $+\varkappa$ bzw. $-\varkappa$, sowie der Weltmaßstrecke m und ihre Beziehung zur Länge der ganzen Geraden und zu dem Begriff der Weltkrümmung, die Bedeutung der fünf allgemeinen Weltkonstanten, die neue überraschend einfache Ableitung der trigonometrischen Formeln in der nichteuklidischen Geometrie, die Entwicklung des Dreiecksinhalts, besonders der neue Beweis der Endlichkeit des Inhalts eines dreifach asymptotischen Dreiecks.[3])

---

1) Von neueren deutschen Lehrbüchern dieser Richtung nenne ich vor allem: H. Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, 3. Auflage, Leipzig 1923; R. Baldus, Nichteuklidische Geometrie, Hyperbolische Geometrie der Ebene, Leipzig 1927.

2) Diesen Vorwurf hat schon L. Bieberbach zurückgewiesen in seiner sehr lesenswerten Abhandlung: Über die Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie im 19. Jahrhundert, Sitzungsberichte der Preuß. Akademie der Wiss., Bd. XVIII, 1925, S. 393.

3) Es sei hier auch auf meine besonders erschienene kleine Schrift: Die Pseudosphäre und die nichteuklidische Geometrie, hingewiesen, die als eine sehr einfache Einführung in die neuen Anschauungen gelten mag.

Bei der Abfassung meines Werkes ist mir die Strenge der Beweisführung vorbildlich gewesen, die ich bei meinem hochverehrten Lehrer H. A. Schwarz, dem bedeutenden Schüler von Weierstraß, zu würdigen kennenlernte, sowie die schöpferische Phantasie und Anschaulichkeit in den Vorlesungen von F. Klein. So habe ich bei aller Strenge der logischen Darstellung doch stets versucht, auch die Anschauung, insbesondere durch Hinzufügen zahlreicher Figuren, zu ihrem vollen Rechte kommen zu lassen, getreu dem Grundsatz: geometria geometrice. Dem mir vorschwebenden wünschenswerten Ziele entsprechend, möglichst viele Mathematiker und Physiker anzuregen, mit den Gedankengängen der nichteuklidischen Geometrie sich vertraut zu machen, habe ich natürlich auch auf die didaktische und pädagogische Durcharbeitung der einzelnen Untersuchungen besondere Sorgfalt zu verwenden mich bemüht. Übrigens habe ich mich im wesentlichen, um das Eindringen in die neuen Ideen zu erleichtern, auf die Betrachtung der *ebenen* nichteuklidischen Geometrie beschränkt. Jedoch habe ich nicht darauf verzichtet, diese Betrachtung nun auch bis zu den höchsten Gipfeln fortzusetzen, von denen aus doch einmal die beste Aussicht ist. Hervorheben möchte ich noch, daß spezielle Vorkenntnisse außer einfachen Sätzen der Analysis nicht vorausgesetzt werden. Es sollte mich freuen, wenn das Ideal nun auch mehr und mehr erreicht wird, daß die nichteuklidische Geometrie Gemeingut aller Mathematiker und Physiker wird, vor allem auch der Studierenden und der Lehrer an unseren höheren Schulen.

Mein innigster Dank gilt vor allem denjenigen Körperschaften, die in hochherziger Weise durch namhafte Druckkostenunterstützung die Herausgabe des Werkes möglich gemacht haben, wie der Gesellschaft der Freunde der Technischen Hochschule Danzig, dem Senat der Freien Stadt Danzig, Abteilung für Wissenschaft, Kunst und Volksbildung und dem Preußischen Ministerium für Wissenschaft, Kunst und Volksbildung. Nicht minder danke ich dem Verlage B. G. Teubner für sein bereitwilliges Eingehen auf meine Wünsche.

Aufs tiefste bedauern muß ich es, daß es mir nicht mehr vergönnt ist, das erste Exemplar meines Buches meinem hochverehrten Lehrer Felix Klein überreichen zu können.

Danzig-Langfuhr, im November 1930. **F. Schilling.**

Inhalt.[1])

1) Die §§ 31—34 können beim ersten Studium fortgelassen werden.

Einleitung.

Die Stellung der nichteuklidischen Geometrie in der Welt des Mathematikers, Physikers und Philosophen.

Zwei fundamentale Begriffe zunächst beherrschen all unser Denken, Fühlen und Wollen: *Raum und Zeit.* Auf die philosophische Untersuchung, wie diese Begriffe in unserem Bewußtsein entstanden sind, wollen wir hier nicht ausführlich eingehen. Nach Kant sind Raum und Zeit die zwei a priori unserer Vernunft mitgegebenen inneren Anschauungsformen, in die wir gleichsam wie in zwei von vornherein vorgegebene Fächer die aus der Außenwelt oder unserem Innenleben auf uns einwirkenden Sinneseindrücke einordnen.[1]) Dem *Mathematiker* ist es lieber, die Begriffe „Raum und Zeit" als Abstraktionen unserer Erfahrungen aufzufassen, sie aus unseren Beobachtungen an den Dingen und Erscheinungen unserer Umwelt gewonnen zu denken, aus der Erkenntnis des Nebeneinanderliegens der Dinge und des Aufeinanderfolgens der Erscheinungen. Zwischen diesen beiden sehr eigenartigen Begriffen bestehen aber wesentliche Unterschiede, die wir doch hervorheben wollen: Den uns umgebenden Raum haben wir uns als *dreidimensional,* die Zeit als *eindimensional* vorzustellen, d. h. es ist eben möglich, die Punkte des Raumes oder eines Teiles von ihm, wie wir später noch im einzelnen entwickeln werden, drei Zahlen oder Koordinaten x, y, z eineindeutig und stetig zuzuordnen, so daß also jedem Zahlentripel ein Punkt und umgekehrt entspricht, während die „Augenblicke" der Zeit, die Zeitpunkte, sich eineindeutig und stetig einer Variablen t zuordnen lassen.

Den Raum denken wir uns auch *in jedem Zeitpunkt existierend.* Die Zeit aber existiert nicht für alle Werte $-\infty < t < +\infty$, vielmehr existiert eigentlich nur ein einziger Zeitpunkt, der beständig sich ändert, ein flüchtiger Augenblick, analog wie bei einem fließenden Wasser an einer bestimmten Stelle immer eine andere und andere Wassermenge existiert. Durch jeden Zeitpunkt, die Gegenwart, wird die ganze Zeit in zwei Teile zerlegt, in die Vergangenheit, die nicht mehr existiert, und in die Zukunft, die noch nicht existiert.

1) Vgl. Kants Kritik der reinen Vernunft, ins Gemeindeutsche übersetzt von Wilhelm Stapel, Hamburg, S. 60ff. und S. 77ff. (Der transzendentalen Ästhetik, d. h. „der Lehre von der Fähigkeit der Anschauung aus bloßer Vernunft, ohne Herzuziehung der Erfahrung" I. und II. Abschnitt, Lehre vom Raum und von der Zeit), ferner Werner Gent, Die Philosophie des Raumes und der Zeit. Die Geschichte des Begriffs des Raumes und der Zeit von Aristoteles bis zum vorkritischen Kant (1768), Bonn 1926.

Ein weiterer wichtiger Unterschied der Begriffe „Raum und Zeit" ist der folgende: Wir denken uns ja in der Geometrie, wie wir sie in der Schule lernen, in der sogenannten euklidischen Geometrie, den Raum in seiner ganzen Ausdehnung unendlich groß. Doch ist dies keineswegs denknotwendig. Vielmehr ist ebenso gut denkbar, daß unser Raum, wenn auch sehr groß, doch endlich und dabei unbegrenzt ist, ebenso wie die Oberfläche einer Kugel endlich und unbegrenzt ist. Es wird ja gerade eine wesentliche Aufgabe unserer späteren Betrachtungen sein, in diese Verhältnisse mit voller Klarheit hineinzublicken. Jedenfalls ist es dementsprechend möglich, denkbar, den Begriff des Unendlichen bei dem Raum völlig auszuschalten. Ganz anders verhält es sich mit der Zeit. Hier scheint es schlechterdings unmöglich, undenkbar, den gesamten Verlauf der Zeit als einen endlichen anzusehen. Vielmehr können wir keine andere Vorstellung uns schaffen, als daß die bereits verflossene Zeit unendlich groß ist und die noch bevorstehende Zeit auch über jedes angebbare Maß hinaus ausgedehnt ist. Wir können also aus dem Begriff „Zeit" den Begriff des *Unendlichen* nicht fortdenken, wobei freilich auch dieser letzte Begriff uns gänzlich unvorstellbar ist. Ich kann mich in einen bestimmten Raum begeben, doch in keine bestimmte Zeit. Die vergangene Zeit ist verloren für mich, die zukünftige kann ich nicht herzaubern, ich muß warten, bis sie von selbst kommt.

Endlich wollen wir noch in einer letzten Hinsicht Raum und Zeit vergleichen: Dem Mathematiker und Physiker tritt der Begriff „Zeit" ja eng verbunden mit dem Begriff *Bewegung* irgendwelcher Körper im Raum entgegen, ja, die Zeit wird demgemäß auch gemessen durch solche Instrumente, Uhren, bei denen eine Bewegung, z. B. die periodische Pendelbewegung, benutzt wird. Nun können wir uns aber den Begriff „Zeit" auch ableiten von *Vorgängen unseres inneren Seelenlebens,* bei denen eine Bewegung, wie überhaupt der Raum, völlig ausgeschaltet ist. Hiermit treten wir in das Gebiet der Psychologie und Physiologie ein. Wir können doch z. B. einer von irgendwoher zu uns klingenden Musik zuhören, wir können innere Lust- und Schmerzgefühle mit unseren Sinnen verfolgen, sich änderndes Wohlbehagen oder wechselndes Unbehagen (angenehme Gerüche, Zahnschmerzen oder dgl.). Hierbei wird wohl der Begriff der Zeit, des zeitlichen Verlaufes solchen Geschehens, aber nicht notwendig damit verknüpft auch der Begriff des Raumes in unser Bewußtsein treten. Freilich ist es nicht möglich, diese Zeit unseres Innenlebens nach ihr eigenen Methoden zu messen. Wir könnten uns aber sehr wohl auch Wesen denken, die nur den Zeitbegriff, aber nicht auch den Raumbegriff kennen würden, eben solche seelenvolle Wesen, die nur von ihren inneren Zuständen ein Bewußtsein haben. Vielleicht ist es auch möglich (ebenso wie der Mathematiker gelegentlich sich Wesen mit nur zweidimensionaler Raum-

vorstellung und der Zeitvorstellung denkt), uns Wesen zu denken, die umgekehrt nur den Raumbegriff, aber nicht den Zeitbegriff besäßen; dann ist natürlich das Bewußtsein von irgendwelcher Veränderung oder Bewegung im Raum auszuschließen. Alles Vorhandene im Raum müßte für ein solches Wesen starr und in jeder Hinsicht unverändert sein, es wäre die so gedachte oder empfundene Welt des absoluten Todes, des tiefen Schweigens, dem Nirvana der Inder vergleichbar. Vielleicht kann ich auch daran erinnern, daß man wohl einmal an eine vierte Raumdimension denkt; der Mathematiker spricht von regulären Körpern im vierdimensionalen Raum. Eigenartig genug ist es, daß wohl noch nie jemand auch an ein Geschehen bei einer zweidimensionalen Zeit gedacht hat. All solche Gedanken können natürlich nur den Zweck haben, dazu beizutragen, das Verhältnis der Begriffe Raum und Zeit zueinander zu klären. Jedenfalls erkennen wir, daß Raum und Zeit doch auch prinzipiell recht verschiedene Begriffe sind.

Es sei ferner auch an folgende Tatsache erinnert: Mit der Lehre vom Raum, der Geometrie, hat der menschliche Geist sich auch schon seit Jahrtausenden beschäftigt. Die Kegelschnittslehre z. B. ist von den griechischen Philosophen bereits in hoher Vollendung ausgestaltet[1]), ohne daß sie ahnten, welche tiefgehende Anwendung dereinst in den Keplerschen Gesetzen diese Untersuchungen gewinnen sollten. Im Gegensatz hierzu hat man kaum Veranlassung gefunden, auch eine Lehre von der Zeit, eine Tempometrie, aufzustellen. Diese stiefmütterliche Behandlung der Zeit mag in philosophischer Hinsicht eigenartig genug sein. Als Beispiel eines Zeitsatzes sei etwa der folgende angeführt: *Ist ein Ereignis $\mathfrak{A}$ früher als ein Ereignis $\mathfrak{B}$ und dieses früher als ein Ereignis $\mathfrak{C}$, so ist auch das Ereignis $\mathfrak{A}$ früher als $\mathfrak{C}$.*

Zu den beiden Grundbegriffen „Raum und Zeit“ kommt nun noch als dritter der Begriff „*Materie*“ hinzu, mag es sich hier um Masse, Moleküle, Atome, Elektronen, Energie, Feldstärke oder überhaupt um sonst einen gedachten physikalischen Zustand der Raumpunkte handeln. Diese drei Begriffe umfassen ja die reale Welt des Mathematikers, Physikers und Ingenieurs. Zu ihr tritt für den Mathematiker noch die ideale Welt der reinen Zahlen, die Zahlentheorie, hinzu, während der Philosoph noch mit den Begriffen wie „Geist, Seele“ sich auseinanderzusetzen hat und hier der Kampf zwischen Dualismus und Monismus nicht erlöschen will.

Wir wollen uns demgegenüber bescheiden und allein mit dem Begriff „*Raum*“ uns kritisch beschäftigen. Insbesondere wollen wir darüber in unseren philosophisch-geometrischen Untersuchungen uns klar zu werden suchen, wie wir uns unseren *wirklichen* Raum als in seiner ganzen Ausdehnung beschaffen denken können. Neben der für uns in erster Linie wichtigen metaphysischen

1) H. G. Zeuthen, Die Kegelschnitte im Altertum, Leipzig 1886.

Bedeutung unserer Untersuchungen finden solche geometrischen Entwicklungen, die Behandlung der nichteuklidischen Geometrien, aber auch ihre wichtige spezielle Anwendung in der besonders von H. A. Lorentz, Poincaré, Einstein und Minkowski geschaffenen *Relativitätstheorie*, und zwar sowohl in der speziellen wie der allgemeinen. In der speziellen Relativitätstheorie handelt es sich ja vor allem um die Gruppe der Lorentztransformationen für die Raum- und Zeitkoordinaten, welche ganz analoge Betrachtungen erfordert, wie wir sie in den nichteuklidischen Geometrien durchführen werden. Zur näheren Erfassung dieses Gedankens sei schon jetzt auf die Abhandlung von Felix Klein verwiesen: Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe.[1]) Hier wird zuerst kurz die nichteuklidische Geometrie in ihren modernen Grundgedanken entwickelt und dann der Vergleich mit den entsprechenden Verhältnissen der Relativitätstheorie durchgeführt. Ohne im einzelnen hierauf einzugehen, wollen wir nur noch folgendes hervorheben: In der speziellen Relativitätstheorie sind ja der *Vereinigung von Raum und Zeit* tiefgehende Untersuchungen gewidmet. Die Grundlage bildet hier eben, daß Raum und Zeit voneinander untrennbare Größen sind, die gemeinsame Transformationen erleiden. Ich brauche nur an den klassischen Ausspruch von H. Minkowski zu erinnern: „*Von Stund an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren.*“ [2])

Der Inbegriff des durch die vier Variablen oder Koordinaten x, y, z, t dargestellten Gebildes nennt Minkowski demgemäß die „*Welt*“; durch spezielle Werte der Variablen wird ein *Weltpunkt* (ein Raumzeitpunkt) dargestellt. Die Gesamtheit der Koordinatenwerte, die ein Weltpunkt in Raum und Zeit annimmt, ist, geometrisch gedeutet, seine *Weltlinie*. Im einfachsten Falle werden die die spezielle Relativitätstheorie beherrschenden Lorentztransformationen durch die Gleichungen gegeben

$$\begin{aligned} x' &= k \cdot (x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= k \cdot \left(t - \frac{v}{c^2} x\right), \end{aligned} \qquad (1\text{a, b, c, d})$$

1) Vortrag, gehalten in der Göttinger Mathematischen Gesellschaft am 10. Mai 1910, Jahresbericht der Deutschen Math.Ver. Bd. 19, Leipzig 1910, S. 281, abgedruckt in Kleins Gesammelten Abhandlungen Bd. I, Berlin 1921, S. 533.

2) H. Minkowski, Raum und Zeit, Vortrag, gehalten auf der Naturforscherversammlung in Köln 1908, gedruckt Leipzig 1909, S. 1 (Gesammelte Abhandlungen Bd. II). Vgl. auch F. Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Bd. II, Leipzig 1927, z. B. S. 77.

wo
$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2}$$
ist, c die Lichtgeschwindigkeit und v die Lineargeschwindigkeit des (x', y', z')-Systems gegen das (x, y, z)-System in der Richtung der zusammenfallenden x, x'-Achsen bedeutet. Die Gleichungen (1a—d) stellen einen speziellen Fall der allgemeineren linearen Transformationen dar:
$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t + a_{15} \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t + a_{25} \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t + a_{35} \\ t' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t + a_{45} \end{aligned}\right\} \tag{3 a—d}$$
und unter einer Lorentztransformation versteht man allgemein eine solche Transformation (3a—d), bei der die Gleichung
$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \tag{4}$$
in sich übergeht, überhaupt der Ausdruck
$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2$$
unveränderlich, invariant ist, wo (x_1, y_1, z_1, t_1) und (x_2, y_2, z_2, t_2) zwei Weltpunkte des (x, y, z, t)-Systems sind und $a_{44} > 0$ ist.[1]) Die Gesamtheit dieser ∞^{10}-Transformationen ist aber die *Lorentzgruppe*.

Mit einer der Gleichung (4) analogen Gleichung und entsprechenden Transformationen werden auch wir uns späterhin zu beschäftigen haben, so daß unsere Betrachtungen vergleichsweise für das Verständnis der Lorentztransformationen wesentlich beizutragen vermögen.

Wie die *allgemeine* Relativitätstheorie aber unmittelbar auf den Anschauungen der nichteuklidischen Geometrie aufgebaut wird, zeigt sogleich am besten ein Blick in das Werk von H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie (3. Aufl., Leipzig 1919), mit den Überschriften des § 10 (Bericht über die nichteuklidische Geometrie), § 11 (Riemannsche Geometrie, die ein besonderer Fall der nichteuklidischen Geometrie ist, wie wir später sehen werden).[2])

Die Betrachtungen dieser Einleitung sollten im wesentlichen *die Stellung und Bedeutung unserer späteren Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie in dem Gebiet des gesamten menschlichen Wissens und Forschens*, insbesondere aber im Gebiet der Mathematik und Physik klarstellen.

1) Vgl. deswegen im einzelnen eben F. Klein, a. a. O. der Gesammelten Abhandlungen Bd. I, S. 547.

2) Man sehe auch: H. I. Mellin, Das Zeit-Raumproblem und das Gravitationsgesetz, Annales Academiae Scientiarum Finnicae Ser. A. tom XXVIII, 1928.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen wenden wir uns nun aber, wie gesagt, ganz der Lehre vom Raum, der Geometrie, zu. Von den vielen Einzelzweigen der Geometrie (analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, algebraische Theorie der Kurven und Flächen, Liniengeometrie usw.) kommen für unsere Untersuchungen besonders die zwei großen Gebiete in Betracht: *Projektive Geometrie* und *Infinitesimalgeometrie* (d. h. Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Kurven und Flächen). So bedeutend indes das letzte Gebiet für die nichteuklidische Geometrie ist, so werden wir doch nur gelegentlich darauf hinzuweisen Veranlassung nehmen, da die eingehende Kenntnis dieses Zweiges der Geometrie nicht vorausgesetzt werden soll, seine Entwicklung aber zuviel Raum beanspruchen würde. Wir wollen also unsere Betrachtungen wesentlich auf der *projektiven Geometrie* aufbauen und daher diese selbst zunächst mit allen für uns notwendigen Sätzen entwickeln.

Vorkenntnisse irgendwelcher Art seien nicht vorausgesetzt. Ja, wir müssen sogar eigentlich alles, was wir in der Schule und späterhin in der Geometrie gelernt haben, uns fernhalten, als wenn wir es vergessen hätten. Denn unser altes Wissen, das nun doch verändert werden muß, kann hier nur Schaden stiften. Wir wollen die Geometrie eben ganz neu aufbauen von ihren Fundamenten an. Es muß also gleichsam eine große Revolution in unserem Geiste vorgehen, doch in der Weise, daß wir nach der rücksichtslosen Zerstörung alles bisherigen geometrischen Wissens ein neues, festes, begründetes Wissen sogleich aufbauen.

Erster Teil.

Entwicklung der Elementargeometrie als Fundament für den Aufbau der projektiven Geometrie.

Erster Abschnitt.

Axiomatische Grundlegung der Elementargeometrie.

§ 1. Die Grundlagen der Geometrie im allgemeinen.

Nachdem insbesondere durch Weierstraß, Dedekind, G. Cantor und andere Mathematiker dem strengen Aufbau der Analysis erfolgreiche kritische Untersuchungen gewidmet waren, ist in neuerer Zeit auch der Aufbau der Geometrie in wesentlich strengerer Form ausgeführt worden, als es bisher im mehr oder weniger engen Anschluß an die Elemente des Euklid geschehen war. An erster Stelle ist Herr M. Pasch zu nennen, der in seinen seit 1873 in Gießen gehaltenen Vorlesungen[1]) darauf hinwies, daß bei der bisherigen Entwicklung der Geometrie eine große Reihe von „Axiomen" (oder Grundsätzen) stillschweigend, also unausgesprochen, auf Grund der Anschauung angewandt wurden. Dementsprechend hatte er zum ersten Male eine eingehende Analyse der unserem geometrischen Denken zugrunde liegenden „ursprünglichen Begriffe" (Grundbegriffe) und „Axiome" (Grundsätze) durchgeführt, deren Gesamtheit notwendig ist, wenn man die Geometrie dann *rein logisch*, also unabhängig von weiterer Anwendung der Anschauung aufbauen will. Unter „ursprünglichen Begriffen" der Geometrie sind hier solche zu verstehen, die nicht mehr auf einfachere Begriffe zurückgeführt werden können, die wir also ohne Definition oder Erklärung hinnehmen, und unter „Axiomen" solche Festsetzungen von Eigenschaften der gewonnenen Begriffe, die nicht auf einfachere Sätze zurückzuführen sind, also nicht bewiesen werden können. In der neuesten Auflage seines Werkes nennt Pasch die ursprünglichen Begriffe und Axiome „*Kernbegriffe*" und „*Kernsätze*" und ihre Gesamtheit den „*Kern*" der Geometrie. Mit seiner Zusammenstellung dieser Kernbegriffe und Kernsätze und den sich anschließenden Entwicklungen hat er für alle späteren Forscher auf dem Ge-

---

1) Aus diesen Vorlesungen ist neben anderen Schriften sein Werk entstanden: Vorlesungen über neuere Geometrie, 2. Aufl. mit einem Anhang von M. Dehn, Die Grundlegung der Geometrie in historischer Entwicklung, Berlin 1926 (1. Aufl. 1882).

biet der „Grundlagen der Geometrie" ein klares, unübertroffenes Vorbild geschaffen. Pasch hat in den §§ 1 und 2 (S. 3—26) für die Grundbegriffe „gerade Linie" und „Ebene", 9 und 4 Kernsätze aufgestellt und daraus 23 und 13 Lehrsätze abgeleitet. Im einzelnen hierauf einzugehen, müssen wir uns schon versagen, da eine erschöpfende Behandlung der hier hineinspielenden Fragen uns doch zu weit von unserem eigentlichen Wege abführen würde. (Doch sei mit Herrn Pasch (a. a. O. S. 26) noch erwähnt, daß in der Marburger Dissertation von Anna Sturmfels, Nachprüfung der Lehre von den Ebenen in Paschs Vorlesungen über neuere Geometrie, 1915, noch eine ganze Reihe weiterer notwendiger Kernsätze angegeben sind.) Ein näheres Eingehen auf diese unterste Grundlegung für die Geometrie erübrigt sich für unsere Betrachtung auch insofern, als ferner nicht nur das vortreffliche Referat über die „Prinzipien der Geometrie" von Herrn F. Enriques[1]) vorliegt, sondern weiterhin auch noch mehrere vortreffliche deutsche Lehrbücher über diesen Gegenstand erschienen sind. Von diesen nenne ich insbesondere: D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 7. Aufl., Leipzig 1930 (1. Aufl. 1899), F. Schur, Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1909.[2])

Es ist jedenfalls erstaunlich, mit wie wenigen Grundbegriffen das stolze Gebäude der Geometrie sich aufbauen läßt. Als solche nenne ich nach Hilbert (a. a. O. S. 2) die Begriffe: Punkt, Gerade, Ebene und die weiteren Grundbegriffe der Beziehung zwischen diesen Dingen, wie: „liegen", „zwischen" usw. (ein Punkt „liegt" auf einer Geraden, ein Punkt liegt „zwischen" zwei anderen auf einer Geraden). Man überlege nur einmal, wie überaus groß die Zahl der Grundbegriffe im Gebiete unseres Innenlebens, in der Psychologie, ist, um alle Eindrücke unseres Auges, Ohres, Muskelgefühls, kurz all unserer Sinne festzulegen (rot, grün, hell, schrill, süß, traurig usw.). Was das allgemeine Wesen der geometrischen Axiome[3]) betrifft, so haben wir diese als Abstrak-

1) Enzyklopädie der math. Wiss., Bd. III, erster Teil, Leipzig 1907, S. 1—129.

2) Von elementaren Darstellungen seien noch genannt: L. Heffter, Die Grundlagen der Geometrie als Unterbau für die analytische Geometrie, Leipzig 1921, 27 S. — H. Thieme, Die Elemente der Geometrie, Leipzig 1909. — F. Enriques, Fragen der Elementargeometrie, Teil 1, Deutsche Ausgabe von H. Thieme, Leipzig, 2. Aufl. 1923. — E. Pascal, Repertorium der höheren Geometrie, 2. Aufl., Leipzig 1910, Kap. I, Grundlagen der Elementargeometrie und Kap. XXIV, Die nichteuklidische Geometrie (beide Kapitel von I. Mollerup in Kopenhagen). Ferner noch: M. Pasch, Die Begriffswelt des Mathematikers in der Vorschule der Geometrie, Leipzig 1922.

3) Vgl. ausführlich deswegen: F. Klein, Über Arithmetisierung der Mathematik, Göttinger Nachrichten 1895, S. 83, Ges. Math. Abhandlungen Bd. II, Berlin 1921, S. 232: „Die Raumanschauung ist zunächst etwas Ungenaues, welches wir zum Zweck der mathematischen Behandlung in den sogenannten Axiomen idealisieren." — F. Klein, Gutachten betr. den 3. Bd. der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie, anläßlich der ersten Verteilung des Lobatschewsky-Preises, Math. Ann., Bd. 50, 1898, S. 584

tionen unserer räumlichen Anschauung zu betrachten. Die Eindrücke, die unsere Sinne, insbesondere unser Sehen und Fühlen, uns von der Gestalt der Dinge unserer Umwelt vermitteln, sind immer ungenau; unsere durch Beobachtung, insbesondere durch Messen gewonnenen Ergebnisse sind infolge der Unvollkommenheit der Meßinstrumente und der beschränkten physiologischen Einrichtung unserer Sinnesorgane nur innerhalb gewisser Grenzen genau. *Die Axiome sollen nun an Stelle dieser Ungenauigkeit in idealisierender Weise streng gültige „Aussagen von absoluter Genauigkeit und Allgemeinheit" als Grundlage für unsere logischen Schlüsse setzen.* Die Axiome sind hiernach nicht Denknotwendigkeiten, sondern zwar aus unserer Erfahrung und Anschauung fließende, doch für unser Denken zweckmäßig formulierte Festsetzungen.[1])

Um noch einige weitere Bemerkungen über die Axiome auszuführen, vor allem aber auch, um bei unseren eigenen weiteren Entwicklungen auf festem Boden zu stehen, wollen wir wenigstens die einfache und übersichtliche Zusammenstellung der beiden ersten Axiomgruppen, welche Herr Hilbert in seinem genannten Werke gibt, anführen. Herr Hilbert stellt insgesamt fünf Axiomgruppen auf für das System der Dinge, welches die ursprünglichen Begriffe „Punkt, Gerade, Ebene" umfaßt und für ihre Beziehung zueinander, wie diese durch die relativen Begriffe, „liegen, zwischen, parallel, kongruent, stetig" angegeben werden, übrigens auch zum Teil in Anlehnung an M. Pasch.

Von diesen lauten die ersten beiden Gruppen (a. a. O. S. 3—5):

Axiomgruppe I: Axiome der Verknüpfung:

I, 1. Zwei voneinander verschiedene Punkte A, B bestimmen stets eine Gerade a.

I, 2. Irgend zwei voneinander verschiedene Punkte einer Geraden bestimmen diese Gerade.

I, 3. Auf einer Geraden gibt es stets wenigstens zwei Punkte, in einer Ebene gibt es stets wenigstens drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte.

bis 585, Ges. Math. Abhandlungen, Bd. I, Berlin 1921, S. 384ff. sowie aus früherer Zeit: H. v. Helmholtz, Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome, Vortrag in Heidelberg 1870, wieder abgedruckt: Vorträge und Reden, 5. Aufl., Braunschweig 1903, Bd. II, S. 1. Endlich sei von neuerer Literatur genannt: R. Strohal, Die Grundbegriffe der reinen Geometrie in ihrem Verhältnis zur Anschauung, Leipzig 1925 und die jüngst erschienenen Werke: G. Hessenberg, Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1930, sowie K. Reidemeister, Grundlagen der Geometrie, Berlin 1930.

1) Schon seit Euklid pflegt man gelegentlich Axiome (*κοιναὶ ἔννοιαι*) und Postulate (*αἰτήματα*) einander gegenüberzustellen. Wegen dieser nie recht klar ausgesprochenen Unterscheidung vgl. F. Enriques, Enzyklopädie, a. a. O. S. 7 und M. Simon, Euklid und die sechs planimetrischen Bücher, Leipzig 1901, S. 31. Wir werden im Text stets die Bezeichnung „Axiome" anwenden.

I, 4. Drei nicht auf ein und derselben Geraden liegende Punkte A, B, C bestimmen stets eine Ebene.

I, 5. Irgend drei Punkte einer Ebene, die nicht auf ein und derselben Geraden liegen, bestimmen die Ebene.

I, 6. Wenn zwei Punkte A, B einer Geraden a in einer Ebene α liegen, so liegt jeder Punkt von a in der Ebene α.

I, 7. Wenn zwei Ebenen α, β einen Punkt A gemein haben, so haben sie wenigstens noch einen weiteren Punkt B gemein.

I, 8. Es gibt wenigstens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte.

Es sei sogleich noch hinzugefügt: Die Axiome I, 1—3 seien als *ebene* Axiome, Axiome I, 4—8 als *räumliche* Axiome bezeichnet.

Axiomgruppe II: Axiome der Anordnung:

II, 1. Wenn A, B, C Punkte einer Geraden sind und B zwischen A und C liegt, so liegt B auch zwischen C und A (Fig. 1).

Fig. 1.

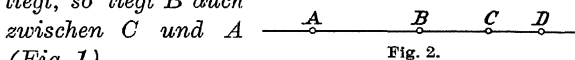
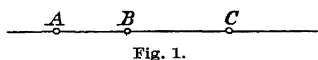
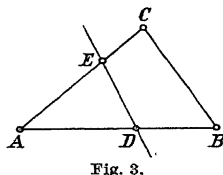



Fig. 2.

II, 2. Wenn A und C zwei Punkte einer Geraden sind, so gibt es stets wenigstens einen Punkt B, der zwischen A und C liegt, und wenigstens einen Punkt D, so daß C zwischen A und D liegt (Fig. 2).

II, 3. Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es stets und nur einen, der zwischen den beiden andern liegt.

Fig. 3.

II, 4. Es seien A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und a eine Gerade in der Ebene ABC, die keinen der Punkte A, B, C trifft: Wenn dann die Gerade a durch einen Punkt der Strecke AB geht, so geht sie gewiß auch entweder durch einen Punkt der Strecke BC oder durch einen Punkt der Strecke AC (Fig. 3).

Hierzu treten dann noch nach Hilbert: III: die Axiome der Kongruenz, IV: das euklidische Parallelenaxiom und V: die Axiome der Stetigkeit. Doch sei gleich hier bemerkt, daß wir diese letzten drei Axiomgruppen im Verlauf unserer späteren Betrachtung durch andere, für uns zweckmäßigere ersetzen werden. Zunächst kommen für uns nur die beiden ersten Axiomgruppen in Betracht. Wegen weiterer Einzelheiten muß ich schon auf das Werk von D. Hilbert selbst verweisen. Doch wollen wir noch folgende Bemerkung anschließen: Ein Axiomensystem muß vor allem die beiden Bedingungen der *Widerspruchslosigkeit* und *gegenseitigen Unabhängigkeit der Axiome* erfüllen, d. h. also: Es darf sich niemals aus den aufgestellten Axiomen ein Lehrsatz ergeben, der zu einem der Axiome selbst oder einem anderen aus ihnen abgeleiteten Lehrsatze

in Widerspruch steht. Ferner darf keines der aufgestellten Axiome sich als ein Lehrsatz aus den übrigen Axiomen folgern lassen. Der Beweis für die Gültigkeit der beiden Forderungen wird von Herrn Hilbert im Kapitel II a. a. O. S. 34—50 geführt und sogleich gezeigt (a. a. O. 33 und 37), daß bei Gültigkeit aller der erwähnten 5 Axiomgruppen es nur *eine* Geometrie, nämlich die analytische kartesische Geometrie (oder die euklidische Geometrie) gibt.

Weitergehende Untersuchungen, welche zu den Grundlagen der Geometrie gehören, beziehen sich vor allem auch darauf, *welche Axiomgruppen zum Beweise eines geometrischen Satzes notwendig sind.* Man kann z. B. die Frage untersuchen, ob zum Beweise eines bestimmten Satzes der *ebenen* Geometrie notwendig *räumliche* Axiome herangezogen werden müssen, insbesondere dann, wenn man nur *gewisse ebene* Axiome zulassen will, oder mit *welchen ebenen* Axiomen allein ein bestimmter Satz zu beweisen ist.[1])

Man kann ferner untersuchen, wie weit man beim Aufbau der Geometrie *ohne* das eine oder andere Axiom, z. B. ohne das Stetigkeitsaxiom, vordringen kann (Nichtarchimedische Geometrien, vgl. Hilbert, a. a. O. S. 47 ff.) und dergleichen Fragen mehr.[2])

Auf alle diese axiomatischen Fragen, so interessant sie sind, können wir hier natürlich nicht eingehen, da sie von unserem Hauptwege, den wir einzuschlagen haben, abführen. Wir haben aber wenigstens einen klaren Einblick in diese vorliegenden scharfsinnigen Untersuchungen im Gebiet der allgemeinen Grundlagen gewonnen und müssen im übrigen deswegen auf das Studium der genannten Schriften verweisen.

§ 2. Vorläufige Betrachtung des Parallelenaxioms im besonderen.

Unser weiteres Interesse soll sich nun wesentlich auf das *Parallelenaxiom* richten. Die Ausführungen dieses Paragraphen aber sollen zunächst nur *einen ersten Einblick in die hier vorliegenden Verhältnisse* gewähren, so daß es sich hier auch noch nicht um vollständig abgeleitete Entwicklungen, um einen systematischen Aufbau aller Gedanken, handeln soll. Wir wollen vielmehr gleichsam einmal mitten hinein springen in die nichteuklidische Geometrie und uns dann umsehen, was wir erblicken.

Das Parallelenaxiom in der gewöhnlichen Form ist das einzige aller geometrischen Axiome, welches sich nicht auf ein *begrenztes* Gebiet der Ebene oder des

---

1) Man vgl. z. B. die Beweise des später von uns genannten (vgl. § 3) und noch viel benutzten Desarguesschen Satzes bei Hilbert, a. a. O. S. 83—88 (Der Beweis dieses Satzes in der Ebene mit Hilfe der Kongruenzaxiome und die Nichtbeweisbarkeit des Satzes in der Ebene ohne die Hilfe der Kongruenzaxiome).

2) Vgl. auch z. B. F. Schur, a. a. O., S. 162 ff., M. Dehn, Die Legendreschen Sätze und die Winkelsumme im Dreieck, Dissertation Göttingen 1900, abgedruckt Math. Ann., Bd. 53, 1900, S. 404 ff., M. Dehn, Anhang zu dem genannten Werke von Pasch, S. 240.

Raumes bezieht, das unmittelbar vor unsern Augen liegt und das, mehr oder weniger groß, allein unserer Beobachtung zugänglich ist. Das Parallelenaxiom will letzten Endes darüber hinaus festsetzen, wie denn die in einem begrenzten Gebiet gewonnenen Erfahrungen, die in den geometrischen Lehrsätzen ausgesprochen sind, räumlich beliebig weit auszudehnen sind. Insbesondere will es die Frage beantworten, wie *in ihrer ganzen Ausdehnung die Gerade beschaffen* zu denken ist. Hat doch noch niemals jemand eine vollständige Gerade überblickt, ja es ist dies auch für unsere beschränkten Sinne und bei unserer Erdgebundenheit gar nicht möglich. Hierin liegt die besondere Eigenart des Parallelenaxioms begründet. Freilich wollen wir sogleich hervorheben: Man kann das Parallelenaxiom in der Form, wie wir es gleich angeben werden, auch durch das eine oder andere Axiom ersetzen, das zunächst auch nur für einen begrenzten Bereich ausgesprochen wird. Wir werden später z. B. sehen, daß wir das Parallelenaxiom auch durch das folgende ersetzen können: In einem gegebenen Dreieck soll bzw. die Winkelsumme gleich oder größer oder kleiner als ein gestreckter Winkel sein. Hierauf können wir im einzelnen jetzt nicht eingehen. Aber auch aus diesen anderen Axiomen folgt letzten Endes auch die Beschaffenheit der ganzen Geraden, so daß auch diese Axiome als solche anzusprechen sind, welche unsere begrenzte Raumvorstellung beliebig weit ausdehnen wollen.

Wir wollen nun zunächst einmal auf Euklid selbst zurückgehen und uns ansehen, wie dort das Parallelenaxiom eingeführt wird. Euklid (ca. 330—275 v. Chr.) beginnt das erste Buch der Elemente mit 22 Erklärungen und 10 Postulaten und Axiomen.[1]) Er sagt in seiner 22. Erklärung:

1. Parallel sind Geraden, welche in derselben Ebene liegen und auf jedem von beiden Teilen ins Unendliche (εἰς ἄπειρον) *ausgezogen auf keinem von beiden einander treffen.*

Er beweist dann in den Sätzen 27 und 28:

2. Werden zwei Geraden von einer dritten so geschnitten, daß ein paar Gegenwinkel oder ein paar Wechselwinkel gleich oder ein paar entgegengesetzter Winkel 2 *R betragen, so sind die geschnittenen Geraden parallel.*

1) Vgl. M. Simon, Euklid und die sechs planimetrischen Bücher, Leipzig 1901, insbesondere S. 23, 30, 38, 56, sowie die kritische Textausgabe von I. S. Heiberg, Euclidis opera omnia, Vol. I, Leipzig 1883. Ferner sei wieder verwiesen auf den Enzyklopädieartikel: Enriques, a. a. O. S. 39ff. und auf den anderen Enzyklopädieartikel: M. Zacharias, Elementargeometrie und elementare nichteuklidische Geometrie in synthetischer Behandlung, Enzykl. Bd. III, 1, 2. Hälfte, Leipzig 1907—1910, S. 863ff. Vor allem aber sei auf die vorzügliche Euklidausgabe hingewiesen: Thomas L. Heath, The thirteen books of Euklids Elements, translated from the text of Heiberg, with introduction and commentary, Vol. I—III, Cambridge 1926, insbesondere Vol. I S. 153 und 307. Es ist eigentlich sehr bedauerlich, daß wir in deutscher Sprache nicht eine gleichwertige Ausgabe des Euklid besitzen.

Euklid benutzt zum Beweise den schon vorher bewiesenen Satz: Ein Außenwinkel eines Dreiecks ist größer als jeder nicht anliegende Innenwinkel. Würden dann die Geraden g, h der Fig. 4, für welche die Voraussetzung $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta$ gelten möge, sich auf einer Seite im Punkte S schneiden, so wäre ein Widerspruch dadurch hervorgerufen, daß der Winkel $\alpha = \beta$ wäre.

Oft wird der Beweis in elementaren Lehrbüchern auch wie folgt geführt: Ist M die Mitte von AB (Fig. 4), so geht die Figur durch halbe Umdrehung um M in sich über. Würden daher die Geraden g, h auf der einen Seite der Transversalen s sich im Endlichen schneiden, so müßten sie sich auch auf der andern Seite von s schneiden. Dies aber ist unmöglich, da sonst die Geraden g, h sich in *zwei* Punkten schneiden würden.

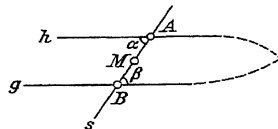



Fig. 4.

Es sei ausdrücklich hervorgehoben, daß bei diesem Beweise, wie auch bei Euklid, *stillschweigend vorausgesetzt wird, daß die Gerade nicht eine endliche Länge besitzt, vielmehr nach beiden Seiten hin unendlich lang ist,* also durch einen Punkt auch in zwei Teile zerfällt.[1]) Von einer solchen Annahme werden wir, das wollen wir doch gleich bemerken, in unsern späteren Ausführungen zunächst völlig frei sein.

Um nun die *Umkehrung* des soeben genannten Satzes zu gewinnen, führt Euklid das folgende Parallelenaxiom ein, daß als das *fünfte Postulat* (oder als das elfte Axiom bei anderer Anordnung, vgl. die Anm, S. 9) gezählt ist:

3. Und wenn eine zwei Geraden schneidende Gerade mit ihnen innere an derselben Seite liegende Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als 2 R, *so schneiden sich die beiden geschnittenen Geraden bei unbegrenzter Verlängerung auf der Seite, auf der diese Winkel liegen.*

Es ist jedenfalls außerordentlich anzuerkennen, daß Euklid nicht einen Scheinbeweis für diese letzte Aussage aufstellt, wie es ja auch vielfach in elementaren Lehrbüchern geschieht, sondern in durchaus strenger Weise es vorzieht, ein neues Axiom hierfür einzuführen, wenn dieses auch im Gegensatz zu den übrigen von vornherein nicht anschaulich einleuchtend erscheint.

Aus diesem Parallelenaxiom folgt, wie bekannt, sofort (immer natürlich unter der Annahme unendlich langer Geraden):

4. Durch einen Punkt P außerhalb einer Geraden g in einer Ebene läßt sich stets und nur eine Parallele ziehen

und:

5. Die Winkelsumme in jedem Dreieck ist gleich 2 R.

1) Dies wird übrigens auch von Herrn Hilbert in seinen „Grundlagen der Geometrie“, a. a. O. S. 28, stillschweigend angenommen. Das Parallelenaxiom von Hilbert daselbst ist auch mit dem sogleich im Text genannten fünften Postulat von Euklid gleichwertig.

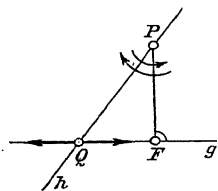
Von Herrn Hilbert ist in seinen Grundlagen der Geometrie a. a. O. S. 14ff., wie bereits hervorgehoben, die Widerspruchslosigkeit aller eingeführten Axiome, also auch die *Widerspruchslosigkeit des Euklidischen Parallelenaxioms mit den übrigen Axiomen,* nachgewiesen. Zugleich ist aber auch gezeigt worden, daß *das Parallelenaxiom von den übrigen auch unabhängig ist.* Waren doch schon seit Euklid durch die Jahrhunderte hindurch immerfort Versuche gemacht worden, das euklidische Parallelenaxiom durch die übrigen Axiome des Euklid zu beweisen. Die Unmöglichkeit eines solchen Beweises ist also endgültig dargetan (übrigens schon vor Hilbert von Felix Klein, worauf wir erst später zurückkommen werden). Wir können jedenfalls es sehr wohl unternehmen, das euklidische Parallelenaxiom wegen seiner Unabhängigkeit von den übrigen Axiomen nun nicht gelten zu lassen, vielmehr an seine Stelle das eine oder andere neue, *nichteuklidische Parallelenaxiom* treten zu lassen. Freilich ist dann auch hier wieder die Widerspruchslosigkeit des neuen Parallelenaxioms mit den übrigen nachzuweisen notwendig, was denn auch später von uns geschehen wird.

Wir wollen jetzt einen kurzen Blick darauf werfen, *welche andere Parallelenaxiome denn an die Stelle des euklidischen Parallelenaxioms* treten können. Offenbar kann man von vornherein die folgenden drei Möglichkeiten für die Einführung eines Parallelenaxioms erkennen:

6. Es gibt in einer Ebene 𝔈 durch einen Punkt P außerhalb einer Geraden g zu dieser entweder e i n e oder z w e i oder k e i n e Parallele.

Man denke nämlich durch P zunächst eine beliebige Gerade h, welche die Gerade g im Punkte Q schneidet, gelegt und diese Gerade h um P im einen oder anderen Sinne gedreht (Fig. 5). Dann wandert sichtlich der Schnittpunkt Q in der einen oder andern Richtung auf g fort. Nun kann ersichtlich bei diesen Drehungen von h im einen oder anderen Sinne sich entweder eine einzige Grenzlage ergeben, wo kein Schneiden der Geraden g und h mehr stattfindet, d. h. kein erreichbarer oder in endlicher Entfernung liegender Schnittpunkt von g und h sich ergibt. Oder aber bei jeder der beiden Drehungen ergibt sich eine besondere Grenzlage der Geraden h, wo die Gerade g nicht mehr geschnitten wird. Oder endlich jede beliebige Gerade durch P schneidet die Gerade g im Endlichen. In jedem Falle gilt jetzt im Gegensatz zu der euklidischen Erklärung der Parallelen die neue Erklärung:

Fig. 5.

7. Gibt es in einer Ebene 𝔈 eine Grenzlage von den eine Gerade g schneidenden Geraden durch einen Punkt P außerhalb g, so soll eine Grenzlage eine Parallele zu g durch P heißen.

Bei den drei genannten Möglichkeiten ergibt sich leicht: Im *ersten* Falle kann die einzige Grenzlage nur eine solche sein, bei der die Geraden g und h mit jeder dritten sie schneidenden Geraden gleiche Gegenwinkel bilden. Im *zweiten* Falle bilden die beiden Parallelen h_1, h_2 einen Winkel ϑ miteinander, der in Übereinstimmung mit der Anschauung sehr klein sein muß, worauf wir natürlich später genauer eingehen werden (Fig. 6; diese Figur, wie analog spätere Figuren, ist natürlich nur als eine schematische anzusehen). Die innerhalb des Winkels ϑ liegenden Geraden durch P schneiden die Gerade g dann natürlich auch nicht. Fällt man die Senkrechte von P auf g, so müssen ersichtlich die beiden Parallelen auch gleiche, spitze Winkel ψ mit dem Lot PF bilden. Denn durch Umwendung der Ebene um das Lot PF müssen die beiden Parallelen in einander übergehen. Im *dritten* Falle ist aber die Länge der ganzen Geraden g eine endliche.[1]) Diesen drei Fällen entsprechend wollen wir uns auch folgender Ausdrucksweise bedienen:

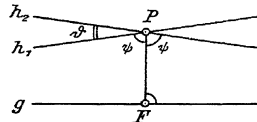



Fig. 6.

8. *Jede Gerade g besitzt bzw. einen, zwei oder keinen unendlich fernen Punkt* (als Grenzlage der endlichen Punkte) entsprechend der in der euklidischen Geometrie gewohnten Ausdrucksweise: Je zwei Parallelen schneiden sich in einem unendlich fernen Punkte.

Den Unterschied der drei Fälle wollen wir noch wie folgt beleuchten: Wir wollen in den drei Fällen die Gerade g von dem Punkt P aus auf einen durch P gehenden Kegelschnitt projizieren, der vollständig vor unsern Augen liegt, wie uns ja die Entwicklung der projektiven Geometrie diese Kurven ergibt. In den drei Fällen erhalten wir dann als Abbild der Geraden g den vollen Kegelschnitt mit Ausnahme eines Punktes S, der der eine Schnittpunkt der Paralle-

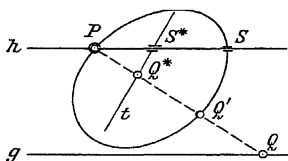
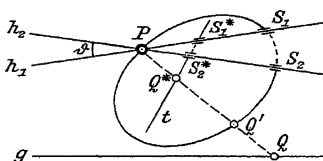
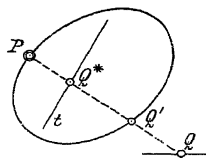



Fig. 7a. Fig. 7b. Fig. 7c.

len h durch P zu g ist (Fig. 7a), oder wir erhalten einen durch zwei Punkte S_1, S_2 begrenzten Bogen des Kegelschnitts (Fig. 7b), oder aber wir erhalten den vollen Kegelschnitt (Fig. 7c). Schneidet man in diesen drei Fällen die von P ausgehenden Projektionsstrahlen durch eine beliebige Gerade t, so erkennen

1) Vgl. Kant-Stapel, a. a. O. S. 68 und 172. Kant sieht den Raum als unendlich an und sieht hierin eine Begründung für die a priori gegebene Anschauung des Raumes.

wir auf t analog einen, zwei oder keine Grenzpunkte für die projizierten, im Endlichen gelegenen Punkte der ursprünglichen Geraden g (Fig. 7a, b, c).

Die drei Geometrien, zu denen die drei Möglichkeiten des Parallelenaxioms hinführen, wollen wir mit F. Klein als euklidische (oder *parabolische*), als *hyperbolische* und als *elliptische* Geometrie in der Ebene unterscheiden; diese Bezeichnung ist einfach der Analogie entnommen, daß in der euklidischen Geometrie die Parabel, Hyperbel und Ellipse mit der unendlich fernen Geraden bzw. einen, zwei oder keinen reellen Punkt gemeinsam hat. Die hyperbolische und elliptische Geometrie bilden dann *die beiden Arten der nichteuklidischen Geometrie.*

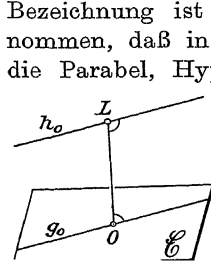



Fig. 8a.

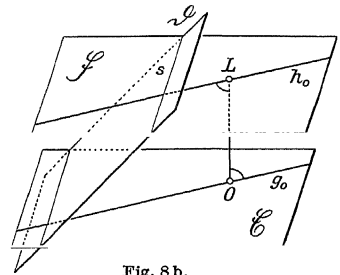



Fig. 8b.

Denken wir ferner die Gerade g von ihrer Anfangslage g aus um einen ihrer Punkte O in der Ebene 𝔈 ganz herumgedreht, so beschreiben in jedem Falle die endlichen (d. h. im Endlichen gelegenenen) Punkte von g alle endlichen Punkte der Ebene. Wir wollen diese Betrachtung sogleich noch etwas vervollständigen. Wir denken in O auf 𝔈 das Lot errichtet. In dem Falle der *euklidischen Geometrie* denken wir uns durch einen Punkt L des Lotes in der durch L und g_0 bestimmten Ebene die Parallele h_0 zu g_0 gelegt (Fig. 8a). Es möge dann die ganze Figur um das Lot LO gedreht werden. Dann beschreibt auch die Parallele h_0 eine Ebene, die Parallelebene 𝔉 zu 𝔈, d. h. den geometrischen Ort aller Parallelen durch L zu 𝔈 (Fig. 8b). Man bedient sich nun bekanntlich der Ausdrucksweise:

9. *Auch die beiden Parallelebenen* 𝔈 *und* 𝔉 *schneiden sich in einer Geraden, der „unendlich fernen Geraden" von* 𝔈, mit anderen Worten: Das unendlich Weite der Ebene 𝔈 wird hiernach als eine Gerade angesehen. Wir sehen auch leicht: Wenn wir noch eine beliebige dritte Ebene 𝔇 hinzunehmen, welche die Ebene 𝔉 in der Geraden s schneidet, so können wir diese Gerade s als die *Projektion der unendlich fernen Geraden der Ebene* 𝔈 vom Punkte L aus ansehen. Hierdurch gewinnt die Berechtigung unserer obigen Ausdrucksweise erneut eine Stütze.

Analog wollen wir nun im Falle der *hyperbolischen* Geometrie verfahren: Wir wissen ja schon, daß das unendlich Weite der Ebene 𝔈 von jeder Geraden dieser Ebene in zwei unendlich fernen Punkten geschnitten wird. Wir legen weiter durch den Punkt L des Lotes OL in der Ebene durch L und g_0 die beiden Parallelen h_1, h_2 zu g_0, welche ja den gleichen spitzen Winkel ψ mit OL bilden

(Fig. 9a). Wieder lassen wir die ganze Figur um das Lot OL sich drehen. Dann beschreiben insbesondere die beiden Parallelen h_1, h_2 denselben Rotationskegel. *Dieser Kegel mit seinen Erzeugenden ist jetzt der geometrische Ort* *aller* *Parallelen durch den Punkt L zur Ebene* 𝔈. Wir denken nun diesen Rotationskegel so durch eine beliebige Ebene 𝔇 geschnitten, daß der Schnitt, ein Kegelschnitt, ganz im Endlichen liegt, d. h. alle Erzeugenden des Kegels im Endlichen geschnitten werden (Fig. 9b). Als solche Ebene können wir etwa die

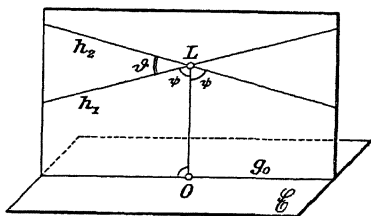



Fig. 9a.

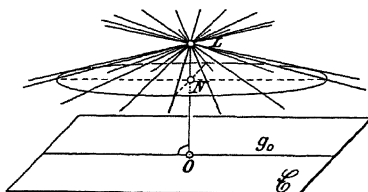



Fig. 9b.

senkrechte Ebene zum Lot OL durch einen Punkt N desselben wählen. Wir brauchen, um die Verhältnisse vollständig zu überblicken, nur in der Ebene durch L und g_0, die in der Fig. 9c besonders gezeichnet sei, durch N auch die beiden Parallelen k_1, k_2 zu g_0 gelegt zu denken. Die nach dem einen der unendlich fernen Punkte von g_0 gehende Richtung der Geraden k_1 bildet den einen stumpfen Winkel am Punkte N mit der Richtung NL. Also muß das Lot in N auf LN die Gerade h_1 im Endlichen schneiden. (Natürlich ist auch g_0 eine Parallele zu h_1 durch O und ebenso k_1 eine Parallele zu h_1 durch N, wie hier nicht weiter ausgeführt werden soll.) Wir erkennen also: Die in N zu OL senkrechte Ebene schneidet in der Tat alle Erzeugenden des Rotationskegels im Endlichen. Hiernach können wir uns ganz analog, wie bei der euklidischen Ebene, der Ausdrucksweise bedienen:

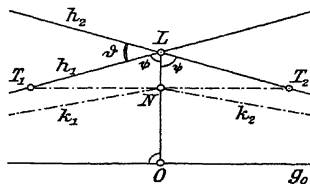



Fig. 9c.

10. Das Unendlichweite der Ebene 𝔈 *wird in der hyperbolischen Geometrie als ein Kegelschnitt angesehen.*

Im Falle der *elliptischen Geometrie* schließlich sind ja überhaupt keine unendlich fernen Punkte da. Die Ebene geht vielmehr nach allen Richtungen in sich selbst über, sie ist nach allen Richtungen endlich ausgedehnt, ohne irgendwelche Begrenzung. *Wir erkennen also bei dieser elementaren Betrachtung schon sehr eigenartige und voneinander verschiedene Eigenschaften der Ebene in den drei Fällen der euklidischen, hyperbolischen und elliptischen Geometrie.*

Nach diesen Vorbemerkungen können wir uns doch nicht sogleich zu dem strengen systematischen Aufbau der drei Geometrien, insbesondere der beiden nichteuklidischen Geometrien hinwenden, welche letzteren beiden natürlich im besonderen Maße unser Interesse auf sich lenken. Wir wollen ja, wie wir schon am Schlusse des vorigen Paragraphen hervorhoben, diesen Aufbau in moderner Weise auf dem sicheren Fundament der projektiven Geometrie vornehmen. Hierbei ist es also notwendig, uns vorerst dieses *Fundament der projektiven Geometrie selbst in der Weise zu schaffen, daß hierbei noch kein Parallelenaxiom benutzt wird oder aber die drei verschiedenen Parallelenaxiome gleichzeitig zur Geltung kommen.* Wir wollen auch so vorgehen, daß wir die projektive Geometrie in *analytischer* Behandlung gewinnen, daß wir also zunächst ein bestimmtes Koordinatensystem, ein *projektives Koordinatensystem,* für unsere weiteren Entwicklungen aufstellen. Es ist kein kurzer Weg, den wir bei dieser neuen Entwicklung der projektiven Geometrie zu durchlaufen haben.[1]) Doch wenn wir diese Wanderung glücklich vollbracht haben, so werden wir von dem gewonnenen hohen Standpunkte aus um so leichter und übersichtlicher auch die drei Geometrien in ihren Eigenarten zu beherrschen lernen. Wir werden uns dann aber durchaus darauf beschränken, *allein für die Ebene diese Geometrien kennen zu lernen.* Doch soll die Ebene stets als in einem Raume gelegen angesehen werden, für den die räumlichen Axiome I, 4—8 von Herrn Hilbert gelten. Bei dem Aufbau der *ebenen* projektiven Geometrie werden wir ohnehin gelegentlich der Einfachheit und Anschaulichkeit halber auch räumliche Nebenbetrachtungen hinzunehmen, besonders auch, um einzelne Sätze der Ebene einfach zu beweisen. Für die *Erweiterung der nichteuklidischen Geometrien auf den Raum* werden wir später nur die Grundgedanken angeben und im übrigen auf die noch zu nennende Literatur verweisen, die nach den gewonnenen Kenntnissen dann nicht allzuschwer zu studieren ist.

Ehe wir jetzt aber zu dem strengen Aufbau der ebenen projektiven Geometrie übergehen, müssen wir vorerst doch noch einen Blick auf die Axiome der Anordnung, welche ja unseren Betrachtungen zugrunde liegen sollen, zurückwerfen, ja sie einer *Revision* von unserem gewonnenen Standpunkte aus

1) Ein solcher vom Parallelenaxiom unabhängiger Aufbau der projektiven Geometrie ist zuerst im Anschluß an v. Staudt von F. Klein durchgeführt in seinen drei grundlegenden Arbeiten: Über die sogenannte nichteuklidische Geometrie (1871—73), an die sich dann noch weitere Arbeiten anschlossen, Gesammelte math. Abh. I, Berlin 1921, S. 241 ff. Die gewöhnlichen Lehrbücher der projektiven Geometrie, die von vornherein das euklidische Parallelenaxiom zugrunde legen, kommen also für uns nicht in Betracht. Ich nenne von diesen besonders: Th. Reye, Die Geometrie der Lage, I—III, 4. bzw. 5. Aufl., Leipzig 1907—1910. — W. Fiedler, Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage, I—III, 4. Aufl., Leipzig 1904. — F. Enriques, Vorlesungen über projektive Geometrie, 2. Aufl., Leipzig 1915. — H. Beck, Elementargeometrie II, Leipzig 1930.

unterziehen. Die von uns zu benutzenden Axiome müssen doch für alle drei Parallelenaxiome gemeinsam gelten. Betrachten wir nun beispielsweise das Axiom II, 1 von Herrn Hilbert. Das Wort „zwischen" muß jetzt genauer in seiner Bedeutung festgelegt werden. Wie wir schon sagten, ist ja stillschweigend bei Herrn Hilbert die Gerade nach beiden Seiten hin unendlich lang angenommen. Wenn aber die elliptische Geometrie vorliegt, so sind die beiden Teile, in welche eine Gerade g durch zwei Punkte A, B zerfällt, logisch ganz gleichwertig (Fig. 10), wenn auch der eine dieser Teile unserer Anschauung nicht ohne weiteres zugänglich ist. Was kann es hier heißen: Ein dritter Punkt C soll zwischen A und B gelegen sein? Bei dem Begriff „zwischen" denken wir unseren Blick längs des einen oder anderen Teils der Geraden, der eben durch die zwei Punkte A, B begrenzt ist, hingleiten, und wenn wir dann hierbei den dritten Punkt C antreffen, so können wir wohl sagen, daß der Punkt C auch dem ausgewählten Teile der Geraden angehört; aber wir können nicht ohne weiteres sagen, daß nun C „zwischen" A, B gelegen sei. Denn wir hätten ja auch den anderen Teil der Geraden überblicken können, der auch die Endpunkte A, B hat.

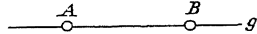



Fig. 10.

Ebenso ist eine *Strecke in der elliptischen Geometrie* nicht durch zwei Punkte einer Geraden eindeutig bestimmt. Die eindeutige Bestimmung einer Strecke durch zwei Punkte einer Geraden enthält also gleichsam schon einen Teil von dem, was das Parallelenaxiom aussagen soll. Jedenfalls ist für unseren Standpunkt eine Abänderung oder nähere Erläuterung der Axiome der Anordnung notwendig. Wir können etwa außer A, B noch einen weiteren Punkt D der Geraden g fest annehmen (Fig. 11a, b). Ist dann noch ein beliebiger Punkt C der Geraden g gegeben, so können wir unterscheiden, ob die beiden Punktepaare A, B und C, D sich gegenseitig trennen oder nicht. In der Fig. 11a trennen sich beispielsweise diese Punktepaare, in der Fig. 11b aber nicht. Diesen beiden Möglichkeiten entsprechend können wir dann auch uns der Ausdrucksweise bedienen: Der Punkt C liegt „zwischen" A, B bei ausgeschlossenem Punkte D oder nicht.[1]) Man vergleiche hinsichtlich aller dieser Betrachtungen auch die analogen Lagenverhältnisse bei vier Strahlen a, b, c, d durch denselben Punkt T (Fig. 11c).

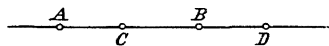
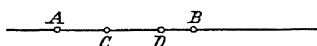
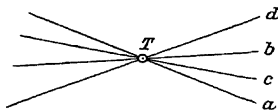



Fig. 11a.

Fig. 11b.

Fig. 11c.

1) Vgl. deswegen Hilbert, a. a. O. 1930, S. 4, Schur, a. a. O. S. 5 (2. Postulat), sowie Pasch, a. a. O. 1926, S. 4 und den Kernsatz I S. 5: „Zwischen zwei Punkten kann man stets eine gerade Strecke ziehen und zwar nur eine", sowie auf S. 59ff. L. Heffter,

Durch die Begriffe des Getrenntliegens bzw. des Nichtgetrenntliegens zweier Punktepaare einer Geraden findet also der Begriff „zwischen" seine neue Bedeutung. In allen drei Geometrien ist dann eine „*Strecke*" der Inbegriff aller Punkte C, welche von den gegebenen Punkten A, B durch einen ebenfalls gegebenen Punkt D getrennt sind bzw. nicht getrennt sind, beide Male einschließlich der Punkte A, B selbst. Ohne im einzelnen weiter auf diese Verhältnisse einzugehen, insbesondere auch schon alle notwendigen Erläuterungen an den Axiomen der Anordnung vorzunehmen, wollen wir lieber jetzt so verfahren, daß wir uns überhaupt zunächst auf ein *begrenztes Gebiet der Ebene bzw. des Raumes*, und zwar auf eine Dreiecksfläche bzw. einen Tetraederkörper, der sich über der Dreiecksfläche erhebt, beschränken. Ein solches begrenztes Gebiet wird dann wohl öfter in unseren späteren Figuren durch gestrichelte Linien XYZ angedeutet.[1]) Zwei Punkte A, B im Innern des Dreiecks bzw. im Innern des Tetraeders bestimmen dann stets eine und nur eine *Strecke* (Fig. 12). Ein Punkt C liegt „zwischen" A, B auf der durch diese bestimmten Geraden, wenn er dieser Strecke angehört. Wir setzen also jetzt fest:

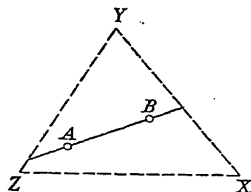



Fig. 12.

11. Die Axiome I, 1—8 und die Axiome II, 1—4 sollen zunächst nur für alle Punkte, Geraden und Ebenen, also die Teile der Geraden und Ebenen, innerhalb eines angegebenen begrenzten Gebietes, eines Dreiecksgebietes bzw. eines Tetraedergebietes, gelten.

Wir werden später sehen, daß die Aussagen der Axiome dann auch für alle begrenzten Dreiecks- und Tetraedergebiete gelten, die wir an das ursprüngliche Gebiet anschließen werden.

Durch die Beschränkung auf ein *einzelnes* begrenztes Gebiet wird indes vor allem auch erreicht, daß *in ihm nun die drei Geometrien keinen Unter-*

---

a. a. O. (Anm. S. 8) S. 11ff. stellt als Axiom der Anordnung II, 1 für die Punkte einer Geraden auf: „Zwei Punkte A und B einer Geraden teilen alle Punkte derselben in zwei Klassen, so daß jeder Punkt außer A und B einer und nur einer Klasse angehört." *Der Punkt C liegt „zwischen" A, B bei ausgeschlossenem Punkte D, heißt also, der Punkt C gehört der Klasse von Punkten an, der D nicht angehört.* Vgl. auch Heffter-Koehler, Lehrbuch der analytischen Geometrie, Bd. I, Karlsruhe 1927, S. 16.

1) Vgl. deswegen auch Pasch, a. a. O. 1926, S. 19, Kernsatz I: „Durch drei beliebige Punkte kann man eine ebene Fläche legen." Hier ist dieser Begriff der „ebenen Fläche" auch als „wohlbegrenzt" gedacht. Analoges gilt auch bereits für die Gerade (a. a. O. S. 4). Die Einführung des begrenzten Gebietes überhaupt bei der Entwicklung der projektiven Geometrie verdanken wir Felix Klein. (Vgl. dessen erste Arbeit „Über die nichteuklidische Geometrie", Nachrichten von der Kgl. Ges. der Wissenschaften zu Göttingen 1871, abgedruckt: Gesammelte math. Abh. I, S. 251.)

schied bei unseren Entwicklungen hervorrufen werden. Das werden wir sogleich im § 4 viel eingehender ausführen. Hierin haben wir jedenfalls die wichtigste Veranlassung für die Beschränkung auf ein begrenztes Gebiet zu erblicken.

Zweiter Abschnitt.

Der Satz von Desargues, die Zentralkollineation und das vollständige Viereck.

§ 3. Elementare Lehrsätze, insbesondere der Satz des Desargues in einem begrenzten Gebiet.

I. Wir beginnen nun den von jedem Parallelenaxiom unabhängigen, *strengen systematischen Aufbau der ebenen projektiven Geometrie,* die man ja auch als Geometrie der Lage oder als neue Geometrie bezeichnet. Wir könnten sie auch als „Geometrie der Verknüpfung und Anordnung" bezeichnen den Axiomen I und II entsprechend, die wir zusammenfassend auch als *Axiome der Lage* bezeichnen können. Wir werden uns aber durchaus beschränken auf solche Betrachtungen, die später für das auf dem gewonnenen Fundament zu errichtende stolze Gebäude der nichteuklidischen Geometrie von Bedeutung sind. Das *Wesen* der projektiven Geometrie der Ebene können wir sogleich so charakterisieren:

Es soll sich hier um alle solche Eigenschaften geometrischer Figuren einer Ebene handeln, welche bei der Projektion der Ebene von einem außerhalb gelegenen Punkte auf eine andere Ebene sich nicht ändern, also „invariant" sind.[1])

In diesem Sinne steht die projektive Geometrie *im Gegensatz zur metrischen Geometrie.* Zur letzteren gehört z. B. der Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck, eine Eigenschaft, die gewiß bei Projektion des Dreiecks auf eine andere Ebene nicht bestehen bleibt. Doch werden wir erst später genauer hierauf zurückkommen.

Wir haben bereits hervorgehoben, daß wir uns zunächst auf das *begrenzte* Gebiet eines Dreiecks bzw. Tetraeders beschränken wollen, das also unmittelbar vor unseren Augen gelegen ist und unserer Anschauung ganz zugänglich ist, *die einzelnen Punkte der Dreiecksfläche bzw. des Tetraederkörpers seien als innere Punkte bezeichnet, die übrigen Punkte des Raumes als äußere Punkte.* Auch sollen zunächst *allein* die Axiome der Verknüpfung und Anordnung für uns in Betracht kommen. Zu diesen Axiomen tritt später (im § 9) nur noch

1) Andere Autoren sprechen wohl auch von „deskriptiven" oder „graphischen" Eigenschaften. Vgl. deswegen S. 53 sowie F. Enriques, Enzyklopädieartikel a. a. O. S. 77, 9 u. 70 und Pasch, a. a. O. 1926, S. 69.

ein *Stetigkeitsaxiom* hinzu, um die ganze projektive Geometrie zu entwickeln. Demgemäß können wir auch die Axiome der Verknüpfung und Anordnung zusammen mit dem Stetigkeitsaxiom zusammenfassend als *projektive* Axiome bezeichnen. Mit diesen durch Abstraktion aus der Anschauung gewonnenen Axiomen werden wir dann allein *rein logisch* zur Gewinnung neuer Begriffe und Sätze operieren, ohne die Anschauung weiter als eben nur zur Veranschaulichung unserer Entwicklungen und Ergebnisse durch Figuren zu benutzen.

Die einzigen *Hilfsmittel* der *ebenen* projektiven Geometrie zur Gewinnung neuer Begriffe und Lehrsätze bestehen nun darin, zwei Punkte durch eine Gerade zu verbinden und zwei Gerade zum Schnitt zu bringen, wozu noch für den *Raum* die Hilfsmittel hinzukommen: Durch einen Punkt und eine Gerade eine Ebene zu legen, eine Gerade und eine Ebene oder zwei Ebenen zum Schnitt zu bringen (projektive Geometrie = Geometrie des Verbindens und Schneidens). Insbesondere werden die Punkte einer Geraden oder Ebene mit einem außerhalb gelegenen Punkte O durch Geraden (oder Strahlen) verbunden und solche von einem Punkte O ausgehende Geraden werden durch eine beliebige andere Gerade oder Ebene geschnitten. In solcher Weise spricht man vom *Projizieren* bzw. von der *Projektion* der einen Geraden oder Ebene auf eine andere Gerade oder Ebene.

Wie wir schon angegeben, werden wir es uns versagen, zunächst auch alle die elementaren Lehrsätze zu entwickeln, die sich aus den Axiomen der Verknüpfung und Anordnung ergeben. Wir verweisen demgemäß am besten auf die genannten Werke von Pasch und Schur. Als Beispiel solcher Lehrsätze sei hier der letzte Satz von Pasch (a. a. O. 1926, S. 25) angeführt:

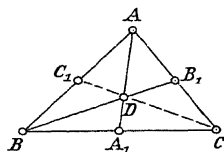



Fig. 13.

1. Liegen von den Punkten A, B, C, D (einer Ebene) keine drei in einer Geraden, und geht die Gerade AD durch einen Punkt A_1 der Strecke BC, die Gerade BD durch einen Punkt B_1 der Strecke CA, so geht die Gerade CD durch einen Punkt C_1 der Strecke AB (Fig. 13).

Es sei aber auch noch folgender Lehrsatz angeführt (Pasch, a. a. O. 1926, S. 24, 10. Lehrsatz), der ja von Herrn Hilbert in seinem Axiomensystem als Axiom II, 4 gewählt ist:

2. Sind A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte, D ein Punkt der Geraden zwischen A und B, g eine Gerade in der Ebene ABC, die durch D, aber durch keinen der Punkte A, B, C hindurch geht, so begegnet g entweder der Geraden AC zwischen A und C oder der Geraden BC zwischen B und C (Fig. 3).

Aus diesem Satz ergibt sich sogleich als Folgerung:

3. Schneidet eine solche Gerade g die eine Seite AB eines Dreiecks ABC

zwischen A, B, eine zweite Seite BC nicht zwischen B, C, so muß notwendig die dritte Seite AC zwischen A, C geschnitten werden (Fig. 3).

Ferner erwähnen wir noch den ebenfalls später benutzten Satz:

4. Sind vier Punkte A, B, C, D im begrenzten Gebiet gegeben, von denen keine drei in einer Geraden liegen, so haben wenigstens entweder die Geraden AD und BC oder BD und AC oder CD und AB einen inneren Schnittpunkt (Fig. 14).

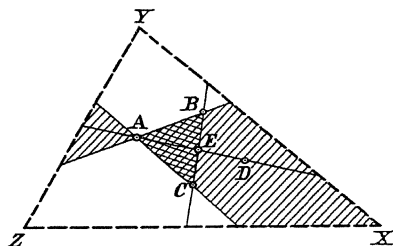
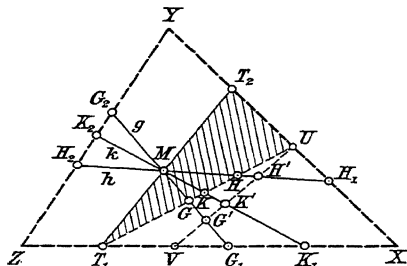



Fig. 14. Fig. 15.

Den Beweis dieses Satzes wollen wir nur andeuten. Betrachten wir nämlich zunächst die durch die drei Punkte A, B, C gegebenen Verbindungsgeraden und das Dreieck ABC, so ist zu zeigen: Der vierte Punkt D liegt notwendig wenigstens in *einem* der drei Paare von Scheitelgebieten, die von je zwei der genannten Verbindungsgeraden so gebildet werden, daß auch die Dreiecksfläche den Scheitelgebieten angehört. Liegt dann z. B. der Punkt D in dem in A zusammenstoßenden Paar von Scheitelgebieten, so wird notwendig die Verbindungslinie AD die Seite BC innerlich schneiden, also in einem inneren Punkte E.

Im Anschluß hieran wollen wir dann folgenden wichtigen Satz betrachten:

5. Sind in der Ebene eine beliebige, doch endliche Anzahl von Geraden g, h, k,... durch denselben inneren Punkt M gegeben, so kann man stets eine Schnittgerade so legen, daß auch ihre Schnittpunkte mit den gegebenen Geraden innere Punkte sind.

Der Beweis dieses Satzes ist wie folgt zu führen (Fig. 15): Man verbinde einen beliebigen Punkt T_1 der Begrenzung mit M. Diese Gerade t muß die Begrenzung (nach dem Axion II, 4) noch in einem zweiten Punkte T_2 schneiden. Durch die Gerade t wird von dem begrenzten Gebiet, der Dreiecksfläche XYZ, ein Teil als eine neue Dreiecksfläche abgeschnitten. Es sei dies hier beispielsweise das Dreieck XT_1T_2. Nur und stets einer der Schnittpunkte aller Geraden g, h, k, ... mit dem Dreieck XYZ gehört der Begrenzung des Dreiecks XT_1T_2 an. Es seien dies die Schnittpunkte G_1, H_1, K_1, ... (Denn die durch den Punkt M der Seite T_1T_2 des Dreiecks gehenden Geraden g, h, k, ... müssen

nach dem Axiom II, 4 ja noch einmal die Begrenzung des Dreiecks XT_1T_2 schneiden.) Es können nun ersichtlich alle Schnittpunkte $G_1, H_1, K_1, \ldots$ entweder nur auf der einen Seite, etwa XT_1 (einschließlich des Punktes X als eventuellen Schnittpunktes), oder auf beiden Seiten XT_1 und XT_2 verteilt sein. Der Beweis für den ersten Fall wird durch den des zweiten Falles sogleich mit erledigt; auch ist ja T_1X selbst schon eine dem Satze 5 genügende Schnittgerade. Im zweiten Falle sei beispielsweise G_1 derjenige Schnittpunkt auf der Seite XT_1, so daß zwischen T_1, G_1 kein Schnittpunkt gelegen sei, und H_1 derjenige Schnittpunkt auf der Seite XT_2, so daß zwischen T_2, H_1 kein Schnittpunkt gelegen sei. Wir behaupten dann, daß *jede Verbindungslinie des Punktes T_1 mit einem Punkte U zwischen T_2, H_1 (oder auch mit H_1) alle gegebenen Geraden $g, h, k, \ldots$ zwischen T_1, U, also in inneren Punkten $G, H, K, \ldots$ schneidet.* Dies folgt sofort aus dem Satze 3 im Hinblick auf das Dreieck T_1T_2U, da jede gegebene Gerade ja die Seite T_1T_2, nicht aber die Seite T_2U schneidet. Auch jede Gerade UV, wo V ein Punkt zwischen T_1, G_1 ist, schneidet alle gegebenen Geraden zwischen U, V also auch in inneren Punkten G', H', $K', \ldots$, wie ein Blick auf das Dreieck T_1UV gemäß desselben Satzes 3 zeigt.

Dem Satze 5 steht sogleich der folgende analoge, ebenfalls sehr wichtige Satz für den Raum zur Seite:

6. *Sind im Raum eine beliebige, doch endliche Anzahl von Geraden $g, h, k, \ldots$ durch denselben inneren Punkt M gegeben, so kann man stets eine Schnittebene $\mathfrak{S}$ so legen, daß auch die Schnittpunkte G, H, $K, \ldots$ mit den gegebenen Geraden* i n n e r e *Punkte sind.*

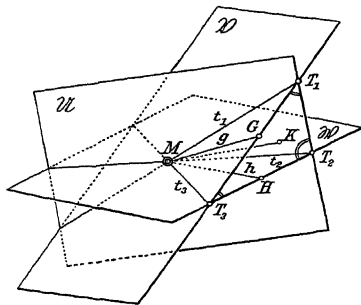



Fig. 16.

Wir wollen den Beweis nur in seinen großen Zügen andeuten.

Man kann stets drei von M ausgehende Geraden so wählen, daß eines der vier Doppeldreikante, das von den drei Ebenen dieser Geraden gebildet wird, alle gegebenen Geraden durch M einschließt. Ein solches Doppeldreikant gewinnt man etwa folgendermaßen (Fig. 16): Zunächst kann man durch M eine Ebene $\mathfrak{U}$ legen, welche keine der gegebenen Geraden enthält. In dieser Ebene wähle man eine beliebige Gerade t_1 durch M und lege durch diese und je eine der gegebenen Geraden neue Ebenen. Unter diesen Ebenen muß es eine, die Ebene $\mathfrak{V}$ geben, so daß die erhaltenen Ebenen durch t_1 sämtlich in dem einen der beiden Paare von Scheitelräumen der Ebenen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ (einschließlich der Begrenzung der Scheitelräume) liegen (vielleicht gleich abgesehen von dem

einfachen Fall, daß sämtliche gegebenen Geraden $g, h, k, \ldots$ in der Ebene 𝔙 liegen). Dann wähle man eine zweite Gerade t_2 durch M in der Ebene 𝔘 und lege wieder durch t_2 und je eine von allen gegebene Gerade durch M die Ebenen. Unter diesen gibt es stets wieder eine solche, die Ebene 𝔚, daß alle gegebenen Geraden in dem einen der vier Doppeldreikante liegen, welche von den drei Ebenen 𝔘, 𝔙, 𝔚 gebildet werden. Wählt man dann drei innere Punkte T_1, T_2, T_3 bzw. auf den der einen Hälfte des bestimmten Doppeldreikants angehörenden Teilen der Kanten t_1, t_2, t_3 aus, so schneidet die Ebene 𝔖 dieser drei Punkte alle gegebenen Geraden $g, h, k, \ldots$ durch M in inneren Punkten (d. h. in Punkten des begrenzten Gebietes). In der Fig. 16 ist dies noch für eine Gerade k mit ihrem Schnittpunkt K angedeutet.

Nun wollen wir noch folgende neuen Begriffe einführen: Die *Punktreihe* als die Gesamtheit aller Punkte einer Geraden t, die der „Träger" der Punktreihe ist, das *Strahlenbüschel* als die Gesamtheit aller Geraden (oder Strahlen) durch einen Punkt T, den Träger des Strahlenbüschels, in einer Ebene, analog das *Ebenenbüschel* als die Gesamtheit aller Ebenen durch eine Gerade t, das *Strahlenbündel* als Gesamtheit aller Strahlen durch einen Punkt T, das *Ebenenbündel* als Gesamtheit aller Ebenen durch einen Punkt T. Diese Träger sind natürlich bei unserem bisherigen Standpunkte stets Geraden oder Ebenen des gewählten Gebietes. Die drei Begriffe: Punktreihe, Strahlenbüschel, Ebenenbüschel nennt man die *projektiven Grundgebilde 1. Stufe*, die Ebene (oder das ebene „Feld" mit ihren Punkten bzw. mit ihren Geraden), das Strahenlbündel und das Ebenenbündel die *projektiven Grundgebilde 2. Stufe*, den Raum das *projektive Grundgebilde 3. Stufe*.

II. Nun haben wir über die elementaren Lehrsätze hinaus einen wichtigen Satz zu beweisen, der gleichsam uns die Pforten für ein weiteres Eindringen in die projektive Geometrie öffnen wird, den folgenden *Satz von Desargues* (1593—1662) oder den Satz von den „perspektiven Dreiecken":

7. *Gehen die Verbindungslinien entsprechender Ecken zweier Dreiecke ABC und $A'B'C'$ durch denselben Punkt O, so liegen die Schnittpunkte P, Q, R entsprechender Seitenpaare auf derselben Geraden s, und umgekehrt.*[1])

Bei unserem bisherigen Standpunkte gelte indes zunächst die weitere *Voraussetzung:*

---

1) Gleichsam als eine Folgerung dieses Satzes können wir noch den weiteren Satz aussprechen: Sind zwei Tetraeder im Raum so gelegen, daß die vier Verbindungslinien entsprechender Ecken durch denselben Punkt O gehen, so liegen die vier Schnittgeraden entsprechender Seitenflächen der Tetraeder in derselben Ebene. Den einfachen Beweis dieses Satzes können wir dem Leser überlassen. Wegen einer erweiterten Auffassung des Desarguesschen Satzes vgl. man auch F. Klein, Vorlesungen über höhere Geometrie, 3. Aufl., Berlin 1926, S. 202.

8. Alle zehn Schnittpunkte, um die es sich bei diesem Satze handelt, sollen innerhalb des begrenzten Gebietes liegen. In dem Satz kommen ja zehn Punkte und zehn Geraden vor, wobei durch jeden der Punkte drei Geraden gehen und auf jeder der Geraden drei Punkte liegen. (Die Besonderheit der Desarguesschen Figur, wie sie durch eine der Figuren 17a, b, c gegeben ist, soll hier ausge-

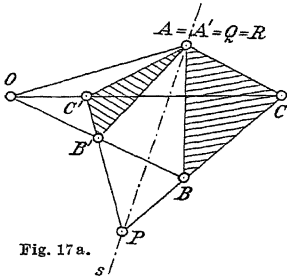
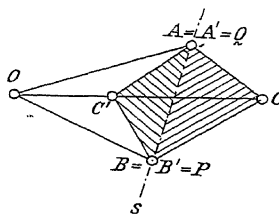
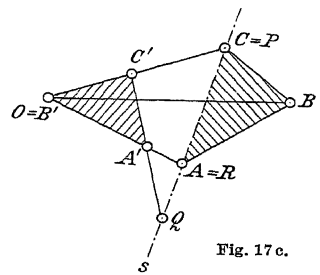



Fig. 17a. Fig. 17b. Fig. 17c.

schlossen sein. Es sollen also weder entsprechende Ecken der beiden Dreiecke noch der Punkt O und eine Dreiecksecke zusammenfallen.)

Der Satz von Desargues gilt nun sowohl für den Fall, daß die beiden Dreiecke im Raum, d. h. in verschiedenen Ebenen, als auch in derselben Ebene liegen.

Im *ersten* Falle (Fig. 18) ist der Beweis des direkten Satzes sehr einfach, da es sich ja im Grunde um die dreiseitige Pyramide mit der Basis ABC und der

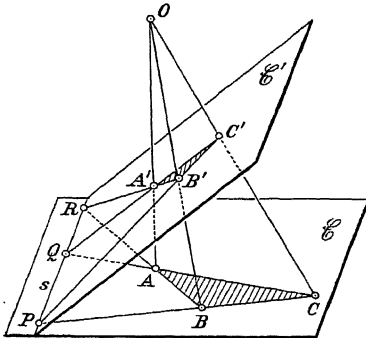
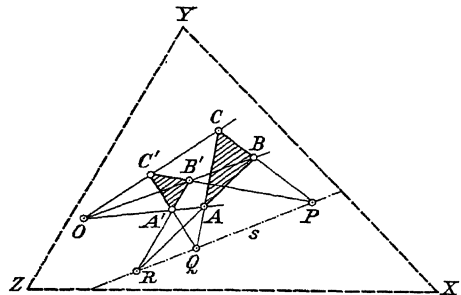
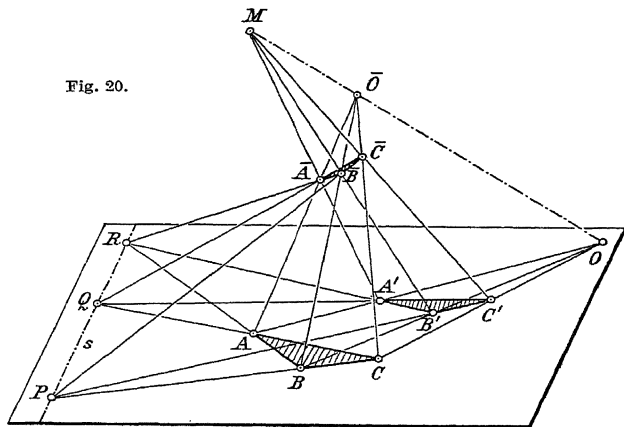



Fig. 18. Fig. 19.

Spitze O handelt, welche durch die Ebene des Dreiecks $A'B'C'$ geschnitten wird. Natürlich liegen dann die Schnittpunkte P, Q, R auf der Schnittlinie s der Ebenen beider Dreiecke. Es ist auch gleichgültig, ob die Punkte A', B', C' zwischen O, A bzw. O, B und O, C liegen, oder ob der eine oder andere der Punkte A', B', C' außerhalb der Strecke OA, OB oder OC liegt (also z. B. O

zwischen A, A' oder A zwischen O, A' liegt). Auch die Umkehrung des Satzes ist im ersten Falle leicht einzusehen.

Wenn aber dem *zweiten* Falle gemäß die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ *in derselben Ebene* $\mathfrak{E}$ liegen (Fig. 19), so beweist man den direkten Satz wie folgt: Wir nehmen zunächst an, daß *die Punkte* A', B', C' *zwischen* O, A; O, B; O, C *liegen*. Wir verbinden nun einen außerhalb $\mathfrak{E}$ gelegenen inneren Punkt $\overline{O}$, der nicht auf der Begrenzung des begrenzten Gebietes liegt, mit den Punkten A, B, C, so daß wieder eine dreiseitige Pyramide mit der Basis ABC und der Spitze $\overline{O}$ entsteht (Fig. 20). Von einem anderen inneren Punkte M auf der Geraden $O\overline{O}$ aus, wobei M außerhalb der Strecke $O\overline{O}$ über $\overline{O}$ hinaus gelegen sei (d. h. $\overline{O}$ zwischen O und M liegt), projizieren wir dann die Punkte A', B', C' auf die Seitenkanten der Pyramide in die Punkte $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$. Es sind dann auch die Punkte $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ innere Punkte;

Fig. 20.

denn sie liegen zwischen $A, \overline{O}$; $B, \overline{O}$; $C, \overline{O}$ (nach dem Satze 3 S. 22, denn es liegt z. B. in dem Dreieck $AO\overline{O}$ der Punkt A' zwischen A und O, der Punkt M aber außerhalb $O\overline{O}$, also muß $\overline{A}$ zwischen A und $\overline{O}$ liegen). Die drei Geraden BC, $B'C'$ und $\overline{B}\overline{C}$ schneiden sich dann in demselben Punkt P, und Analoges gilt bezüglich der Schnittpunkte Q, R. Für die beiden Dreiecke ABC und $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ ist aber die Gültigkeit des Desarguesschen Satzes bereits nachgewiesen. Folglich gilt dieser Satz auch für die Dreiecke ABC und $A'B'C'$.

Wenn aber z. B. der Punkt A' *außerhalb der Strecke* OA *über* O *oder* A hinaus gelegen ist, so wäre es möglich, daß die Gerade MA' die Gerade $\overline{O}A$ nicht mehr innerhalb des begrenzten Gebietes schneiden würde. Doch ist letzteres leicht wie folgt auszuschließen: Es seien S_1, S_2 bzw. T_1, T_2 die beiden Schnittpunkte der Geraden OA bzw. $\overline{O}A$ mit der Begrenzung unseres zugelassenen Tetraedergebietes (Fig. 21). Dann gehört das Viereck $S_1T_1S_2T_2$ dem begrenzten Gebiete an. Ist dann A' etwa zwischen AS_1 gelegen, und ist D der Schnittpunkt von $A'T_1$ mit $O\overline{O}$, so ist M nur zwischen $\overline{O}$, D zu wählen, um einen im begrenzten Gebiet, d. h. zwischen $\overline{O}$, T_1 gelegenen Schnitt von $A'M$ und $\overline{O}A$ zu er-

Fig. 21.

halten. Ist aber A' zwischen O, S_2 gelegen, so genügt es ersichtlich, wenn U der Schnitt von $O\bar{O}$ mit T_1S_1 ist, M zwischen $\bar{O}, U$ zu wählen, damit der Schnitt von $A'M$ und $\bar{O}A$ im begrenzten Gebiet liegt. Auf eine weitere Zergliederung dieser Betrachtungen, etwa gar ihre vollständige Zurückführung auf die Axiome I, II von Herrn Hilbert, was hier keine Schwierigkeit bieten würde, wollen wir hier, wie auch sonst später in analogen Fällen, nicht eingehen, dies vielmehr dem Leser auszuführen überlassen; wiederholt kommt jedenfalls hier der Satz 3 S. 22 zur Anwendung. (Es ist z. B. zu zeigen, daß der Punkt U zwischen S_1, T_1 und der Punkt D zwischen $\bar{O}$, U, ferner, daß der Punkt $\bar{A}$ zwischen $\bar{O}$, T_1 gelegen ist. Letzteres ergibt sich beispielsweise daraus, daß bei dem Dreieck $\bar{O}\,T_1D$ der Punkt A' nicht zwischen D, T_1, der Punkt M zwischen $D, \bar{O}$ liegt; dann muß eben die Gerade $A'M$ die dritte Seite des Dreiecks im inneren Punkte $\bar{A}$ zwischen $\bar{O}$, T_1 schneiden.)

Hiermit ist gezeigt: *In jedem Falle, wenn nur die zehn Schnittpunkte des ebenen Satzes von Desargues im begrenzten Gebiete liegen, läßt sich der Punkt M in hinreichender Nähe von $\bar{O}$ außerhalb $O\bar{O}$ so wählen, daß auch die Punkte $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ sich als im begrenzten Gebiet gelegen ergeben. Damit ist aber auch der direkte ebene Desarguessche Satz allgemein bewiesen.*[1])

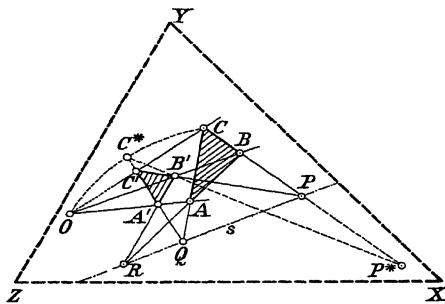



Fig. 22.

Was aber die *Umkehrung dieses Satzes* betrifft, so ist also zu zeigen, daß der (im begrenzten Gebiet liegende) Schnittpunkt O von AA', BB' auch auf CC' liegt, wenn die Punkte P, Q, R auf derselben Gerade s liegen (Fig. 19). Der Beweis ist leicht *indirekt* zu führen.

Wir nehmen an (Fig. 22), die Verbindungslinie OC ginge nicht durch C', sondern schnitte die Gerade $A'C'$ in einem von C' verschiedenen Punkte C^* im begrenzten Gebiet oder gar nicht innerhalb des begrenzten Gebietes.

1) Ein anderer Beweis dieses Satzes ist mit Hilfe des entsprechenden Desarguesschen Satzes im Strahlenbündel zu führen, den Herr V. Reye y Prosper nachgewiesen hat, vgl. die Arbeit: Sur les propriétés graphiques des figures centriques, Math. Ann. Bd. 32, 1888, S. 157. Dieser Satz lautet: *Sind zwei Dreikante mit derselben Spitze so gelegen, daß die drei Ebenen durch je zwei Kanten durch dieselbe Gerade gehen, so liegen die drei Schnittgeraden entsprechender Seitenebenen in derselben Ebene und umgekehrt.*

Um jetzt allen Schwierigkeiten wegen der Beschränkung auf das begrenzte Gebiet zu entgehen, wollen wir die ebene Figur von einem außerhalb ihrer Ebene gelegenen Punkte M aus auf eine neue Ebene $\mathfrak{S}$ projiziert denken. Diese neue Ebene $\mathfrak{S}$ soll jedoch so gewählt sein, daß alle Punkte dieser Ebene, die wir für unseren Beweis benötigen, in dem begrenzten Gebiet liegen, d. h. innere Punkte sind. Die projizierten Punkte seien mit O_0, A_0, B_0, C_0 usw. bezeichnet. Es sollen also z. B. auch die Geraden O_0C_0 und $A_0'C_0'$ sich in dem inneren Punkt C_0^* schneiden, nämlich in dem Schnittpunkte der Ebene $\mathfrak{S}$ mit der Schnittgeraden der beiden Ebenen (M, OC) und $(M, A'C')$. Analog sollen auch die Geraden B_0C_0 und $B_0'C_0^*$ sich in dem inneren Punkte P_0^* schneiden. Daß dieses möglich ist, folgt ja unmittelbar aus dem Satze 6 S. 24. Für die Dreiecke $A_0B_0C_0$ und $A_0'B_0'C_0^*$ in der Ebene $\mathfrak{S}$ würden nun die Voraussetzungen des direkten Desarguesschen Satzes gelten. Folglich müßten die Schnittpunkte P_0^*, Q_0, R_0 auf der Geraden s_0 liegen, d. h. es müßte der Punkt P_0^* auf Q_0R_0 liegen. Das ist aber unmöglich, da der aus P hervorgegangene Punkt P_0 der Schnittpunkt von s_0 und B_0C_0 ist, der Punkt P_0 aber von dem auch auf B_0C_0 liegenden Punkte P_0^* verschieden wäre. Hieraus folgt aber, daß notwendig die drei Geraden AA', BB' und CC' der Ebene $\mathfrak{E}$ durch denselben Punkt O gehen müssen.

§ 4. Einführung der uneigentlichen Punkte und Geraden.

Bei der Beschränkung auf ein begrenztes Gebiet, eine Dreiecksfläche, in der Ebene gilt nach unseren Axiomen der Satz:

1. Je zwei innere Punkte besitzen immer eine Verbindungsgerade, von der wenigstens ein Teil im begrenzten Gebiet liegt.

Zwei Geraden besitzen aber nicht immer einen Schnittpunkt — im begrenzten Gebiet —. Und Analoges gilt für zwei Ebenen oder eine Ebene und eine Gerade in dem begrenzten Gebiet des Raumes, dem Tetraeder. Ja bei zwei Geraden in der Ebene kann sogar bei Gültigkeit des *euklidischen* Parallelenaxioms ein Schnittpunkt in der ganzen Ebene nicht existieren, wenn nämlich die Geraden parallel sind, und Entsprechendes gilt auch bei Gültigkeit des *hyperbolischen* Parallelenaxioms, während bei der Gültigkeit des *elliptischen* Parallelenaxioms zwei Geraden ja immer einen Schnittpunkt in der ganzen Ebene besitzen. Aber schon der Fall, daß zwei Geraden der Ebene *in dem begrenzten Gebiet* keinen Schnittpunkt besitzen, wenn sie ihn auch außerhalb des begrenzten Gebietes haben würden, ist für uns ein Gegensatz zu dem Fall zweier Geraden, die sich in dem begrenzten Gebiete selbst schneiden.

Wir wollen daher nun dazu übergehen, *auch für zwei beliebige Geraden des begrenzten Gebietes, welche in diesem sich nicht schneiden, den Begriff eines*

Schnittpunktes einzuführen und im begrenzten Gebiet zu deuten, wobei es uns ganz gleichgültig sein soll, ob diese Geraden außerhalb des begrenzten Gebietes einen wirklichen Schnittpunkt besitzen oder nicht. Wir wollen diese Überlegung an die Lösung der einfachen *Aufgabe* anknüpfen:

Durch einen inneren Punkt A nach dem äußeren Schnittpunkt zweier Geraden g, h (der also nicht im begrenzten Gebiet, wohl aber außerhalb desselben vorhanden ist) die Verbindungslinie k zu ziehen, und zwar durch eine ganz innerhalb des begrenzten Gebietes verlaufende Konstruktion.

Die Lösung wird durch den Desarguesschen Satz gegeben (Fig. 23). Wir wählen auf den Geraden g, h zwei Punkte B, C, so daß wir das Dreieck ABC erhalten. Wir ziehen dann eine Gerade s, welche die Seitengeraden des Dreiecks bzw. in den Punkten P, Q, R schneidet. Dann legen wir durch P eine weitere Gerade, welche die Geraden g, h in den Punkten B', C' schneide. Den Schnittpunkt A' von $B'R$ und $C'Q$ verbinden wir mit A. Diese Verbindungslinie AA' ergibt die gesuchte Gerade k, wie wir sogleich noch zeigen werden.

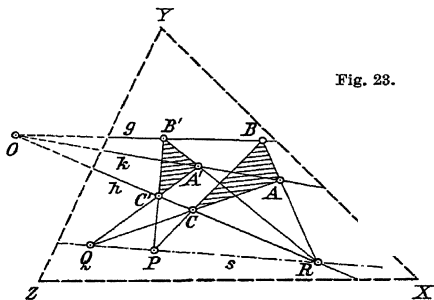



Fig. 23.

Vorerst müssen wir uns fragen, *ob wir denn diese Konstruktion stets innerhalb des begrenzten Gebietes ausführen können,* d. h. so, daß alle benutzten Punkte *innere* Punkte sind. Wir sehen zunächst leicht, daß z. B., wenn der gegebene Punkt A ein *Eckpunkt* des begrenzten Gebietes ist, dies unter Umständen nicht ohne weiteres möglich sein kann. Denn durch einen Eckpunkt gibt es ja Geraden, die, von diesem Punkte abgesehen, ganz außerhalb des begrenzten Gebietes liegen. Wenn wir daher für den Punkt A auch die Lage in einem solchen Eckpunkt zulassen wollen, so müssen wir für die Ausführung der Konstruktion das ursprüngliche begrenzte Gebiet der Dreiecksfläche über den Eckpunkt hinaus vorübergehend erweitert denken. Wir können daher im folgenden im Hinblick auf eine solche Erweiterung des begrenzten Gebietes sogleich voraussetzen, daß der innere Punkt A nicht auf der Begrenzung des Gebietes liegt.

Wenn wir dann nochmals die soeben angegebene „*Desarguessche Konstruktion*" überblicken, so erkennen wir zunächst: Wir können stets die Gerade s so legen, daß wir die Schnittpunkte P, Q, R mit dem Dreieck ABC als innere Punkte erhalten. Wir können ja nach Annahme der Punkte B, C den Punkt Q auf AC so wählen, daß C zwischen A, Q liegt und R auf AB so, daß A zwischen B, R liegt. Dann schneidet BC die Gerade QR in einem Punkte P zwischen Q, R.

(Denn die Gerade BC schneidet das Dreieck AQR in einem Punkte C zwischen A, Q und in einem Punkte B nicht zwischen A, R, muß also die Seite QR in einem Punkte P zwischen Q, R schneiden, nach dem Axiom II, 4 S. 10.) Auch muß C zwischen P, B liegen; denn im Dreieck BPR liegt A zwischen B, R, aber nicht Q zwischen P, R. Nun sehen wir weiter: Ist dann noch der Punkt B' auf g gewählt, so muß ja die Gerade h mit dem Schnittpunkt C zwischen P, B das Dreieck PBB' notwendig (nach dem Axiom II, 4) in einem Punkte C' zwischen P, B' schneiden. Denn würde die Seite BB' zwischen B, B' geschnitten, so wäre ja der Schnittpunkt von g und h ein innerer Punkt, was ausgeschlossen war. Ist dann R mit B' verbunden, so muß endlich QC' das Dreieck PRB' zwischen B', R schneiden, d. h. es ist auch der Punkt A' ein innerer Punkt. — Natürlich kommt es nur auf die *logische* Lösung der Konstruktion der Geraden k an. Daß bei praktischem Zeichnen, wenn die Punkte A und A' sehr nahe aneinander liegen, die Gerade k sich nicht sehr genau zeichnen ließe, ist für unseren Standpunkt gleichgültig.[1])

Wenn nun der Schnittpunkt O der gegebenen Geraden g, h wirklich in der Ebene existiert, wie wir bisher annahmen, so können wir ja die Punkte der ganzen Figur *mitsamt dem Punkte* O von einem Punkte M außerhalb der Ebene durch Strahlen projiziert denken. (Hierbei sind natürlich die Axiome I, 1 und I, 2 über das ursprüngliche Dreiecksgebiet hinaus erweitert angewandt, unserer Festsetzung S. 20 gemäß.) Diese Strahlen durch M seien ferner nach dem Satze 6 S. 24 durch eine Schnittebene $\mathfrak{S}$ in *inneren* Punkten des begrenzten Raumgebietes geschnitten. Dann haben wir ja in der Ebene $\mathfrak{S}$ die Figur des Desarguesschen Satzes so vor uns, wie wir sie früher betrachtet haben, d. h. *auch in der Ebene* $\mathfrak{S}$ *muß die Verbindungslinie* AA' *richtig durch den Punkt* O *gehen.* Es ist endlich auch ohne weiteres klar: *Die Gerade* AA' *oder* k *muß von der Lage der willkürlich zu wählenden Punkte und Geraden der Desarguesschen Konstruktion unabhängig sein.*

Nun erkennen wir aber, daß wir bei der Durchführung der Desarguesschen Konstruktion gar nicht davon Gebrauch gemacht haben, ob die gegebenen Geraden g, h sich wirklich schneiden. Wir hätten die gleiche Konstruktion auch

1) Es ist interessant, wegen dieser und einer Reihe späterer Konstruktionen die elementaren Darstellungen zu vergleichen: A. Giacomini, Über die Lösung der geometrischen Aufgaben mit dem Lineal und den linealen Instrumenten, Betrachtungen vom Standpunkte der projektiven Geometrie (abgedruckt in dem Buche: F. Enriques, Fragen der Elementargeometrie, II. Teil, 2. Aufl., Leipzig 1923, S. 54 ff.), sowie auch das treffliche kleine Buch: P. Zühlke, Konstruktionen in begrenzter Ebene, Leipzig 1913, insbesondere S. 6, 8, 13, 17, 21, wo immerfort (im Anschluß an Giacomini) der Desarguessche Satz benutzt wird, freilich nicht ausdrücklich bewiesen wird, daß *stets* alle zur Konstruktion notwendigen Punkte innerhalb eines bestimmten Gebietes liegen.

in dem Falle durchführen können, *daß die Geraden g, h sich überhaupt nicht schneiden* (was ja nur in der euklidischen oder hyperbolischen Geometrie vorkommen kann). Wir werden daher ganz allgemein die Frage aufwerfen, *ob denn in jedem Falle durch die zulässigen Abänderungen der Desarguesschen Konstruktion sich doch stets dieselbe Gerade k durch A ergibt.* Um dies in der Tat nachzuweisen, denken wir irgend zwei verschiedene Desarguessche Konstruktionen ausgeführt, welche die Geraden k und k' liefern. Wir projizieren dann die ganze Konstruktionsfigur wieder von einem außerhalb ihrer Ebene gelegenen Punkte M auf eine solche zweite Ebene $\mathfrak{S}$, daß gemäß dem Satze 6 S. 24 allen wesentlichen Punkten der beiden Konstruktionen im begrenzten Gebiet gelegene Punkte der Ebene $\mathfrak{S}$ entsprechen, die mit A_0, B_0, C_0 usw. bezeichnet seien, und auch die Schnittgerade l der Ebenen (M, g) und (M, h) von der Ebene $\mathfrak{S}$ in einem Punkte O_0 im begrenzten Gebiet geschnitten wird (Fig. 24a). Es müssen dann nach dem Desarguesschen Satze in der Ebene $\mathfrak{S}$ die Geraden k_0 und k_0', die aus k, k' hervorgegangen sind, identisch sein, da sie beide durch die Punkte A_0 und O_0 gehen müssen. Also sind auch die Geraden k, k' identisch, d. h.:

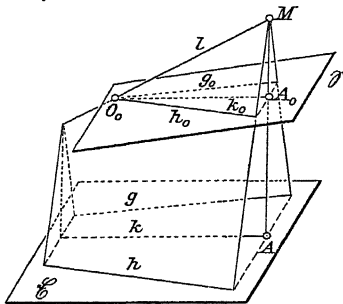



Fig. 24a.

2. *Durch verschiedene zulässige Ausführungen der Desarguesschen Konstruktion erhalten wir in jedem Falle dieselbe Gerade k.*

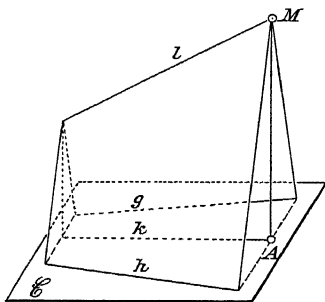
Auch ergibt sich sogleich aus unserer Betrachtung der weitere Satz:

3. *Werden diese drei Geraden g, h, k der Ebene $\mathfrak{E}$ von einem beliebigen außerhalb ihrer Ebene gelegenen inneren Punkte M projiziert, so schneiden sich die drei projizierenden Ebenen (M, g), (M, h) und (M, k) in derselben Geraden l.*

Fig. 24b.

Auf Grund dieses Satzes können wir nun auch die Gerade k durch den Punkt A (Fig. 23) einfacher, wenn wir wollen, durch eine *räumliche* Konstruktion erhalten: *Wir brauchen ja nur zwei Ebenen durch die gegebenen Geraden g, h der Ebene $\mathfrak{E}$ und einen beliebigen inneren Punkt M mit der Schnittlinie l zu legen* (Fig. 24b). *Die Schnittlinie der Ebene $\mathfrak{E}$ mit der Ebene durch A und l ist dann die gewünschte Gerade k.*

Mit diesen Ergebnissen ist nun aber auch der Satz erwiesen:

4. *Auch im Falle, daß die gegebenen Geraden g, h der Ebene 𝔈 sich überhaupt nicht schneiden, ergeben sich zu diesen Geraden g, h stets eindeutig ∞^1 Geraden k, welche das begrenzte Gebiet der Ebene 𝔈 schlicht bedecken, derart also, daß zu jedem Punkte A des begrenzten Gebietes stets und nur eine Gerade k gehört.*

Und werden alle diese Geraden von einem *beliebigen* inneren Punkte M aus projiziert, so gehen alle projizierenden Ebenen durch dieselbe Gerade l hindurch. Dieser Satz berechtigt uns ersichtlich dazu, nun diesen Geraden g, h auch dann, wenn sie keinen wirklichen Schnittpunkt besitzen, einen „*uneigentlichen* (oder nach der Ausdrucksweise anderer Mathematiker einen „*idealen*") *Schnittpunkt*" O in dem Sinne zuzuordnen, daß wir *von einem Strahlenbüschel der Geraden k mit diesem uneigentlichen „Träger O", speziell auch von der Verbindungslinie k des einzelnen inneren Punktes A mit diesem Punkt O sprechen.*

Jedoch liegen die Verhältnisse hier nicht ganz so einfach, wie es zunächst den Anschein hat. Wenn nämlich auch nach dem Satze 4 die ∞^1-Geraden wohlbestimmt sind, so ist doch keineswegs damit auch als selbstverständlich gegeben, daß diese ∞^1-Geraden auch nur *einen* (eigentlichen oder uneigentlichen) Schnittpunkt besitzen. Auch für die Strahlen, die von einem Punkt O im Innern des begrenzten Gebietes ausgehen, bleibt die Möglichkeit, daß sie noch in einem anderen Punkte wieder zusammenlaufen. Es ist daher ausdrücklich hier ein neues Axiom notwendig, welches wir das *Erweiterungsaxiom* nennen wollen:

5. Erweiterungsaxiom: *Wir nehmen an, daß je zwei innere Geraden nur einen (eigentlichen oder uneigentlichen) Schnittpunkt besitzen* (vgl. Axiom I, 2 S. 9).

Erst sehr viel später (§ 34) werden wir dieses Axiom völlig verstehen können, wenn wir nämlich auch die andere Möglichkeit, daß je zwei Geraden stets zwei Schnittpunkte O_1, O_2 besitzen, betrachten und an einem interessanten Beispiel uns auch anschaulich völlig naheführen.

Wir hatten früher bereits alle Punkte der Ebene 𝔈 in die beiden Klassen von inneren und äußeren Punkten zusammengefaßt, je nachdem nämlich der einzelne eigentliche (oder wirkliche) Punkt innerhalb des begrenzten Gebietes (einschließlich der Grenzen) liegt oder nicht. Jetzt wollen wir folgende erweiterte Festsetzung treffen: *Zu den äußeren Punkten wollen wir stets auch die uneigentlichen Punkte der Ebene 𝔈 zählen.* Die inneren Punkte sind natürlich immer eigentliche Punkte. Die äußeren Punkte zerfallen dann eventuell (nämlich in der euklidischen und hyperbolischen Geometrie) noch in eigentliche und in uneigentliche Punkte, je nachdem der einzelne Punkt wirklich existiert oder nicht.[1])

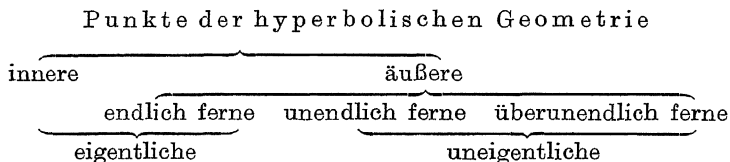
1) In der Literatur sind nicht stets die Begriffe „eigentliche" und „uneigentliche" Punkte mit den unseren identisch, wohl aber z. B. bei Chr. v. Staudt, Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, § 5. (Vgl. auch die Anm. S. 36.)

In der *euklidischen* Geometrie werden die uneigentlichen Punkte allein durch die *unendlich fernen* Punkte gegeben; in der *hyperbolischen* Geometrie dagegen werden wir die uneigentlichen Punkte noch als *unendlich ferne* und als *überunendlich ferne* unterscheiden können, je nachdem der einzelne uneigentliche Punkt der gedachte Schnitt zweier Parallelen ist oder nicht. Hierauf kommen wir später eingehender zurück. Die „äußeren eigentlichen" Punkte wollen wir kurz auch als „*endlich ferne*" Punkte bezeichnen. Hiernach wird die Einteilung der Punkte in der hyperbolischen Geometrie bei angenommenem begrenzten Gebiet durch folgende Übersicht gegeben:

Punkte der hyperbolischen Geometrie

innere — äußere

äußere: endlich ferne, unendlich ferne, überunendlich ferne

eigentliche: innere, endlich ferne — uneigentliche: unendlich ferne, überunendlich ferne

Durch die Einführung der uneigentlichen Punkte in der Ebene $\mathfrak{E}$ auf Grund des Erweiterungsaxioms haben wir den wichtigen Vorteil gewonnen, daß wir nun den folgenden Satz (als Vervollständigung des Satzes 1 am Anfang dieses Paragraphen) ohne Einschränkung oder Ausnahme aussprechen können:

6. Je zwei innere Geraden g, h (d. h. zwei Geraden, die mit einer Strecke oder einem Punkte dem begrenzten Gebiet angehören) schneiden sich stets in einem (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkte.

Hieraus folgt weiter:

7. Eine innere Gerade g, als Träger aller ihrer eigentlichen und uneigentlichen Punkte, ist hiermit zugleich in allen drei Geometrien als eine in sich geschlossene Linie anzusehen.

Alle ihre Punkte werden eben von einem beliebigen inneren, außerhalb g gelegenen Punkte P der Ebene $\mathfrak{E}$ durch das vollständige Strahlenbüschel des Punktes P projiziert. (Vgl. die Fig. 5 S. 14 und die sich anschließenden Betrachtungen.) Die Gerade g zerfällt auch durch irgend zwei Punkte A, B auf ihr immer in zwei „Strecken".

Diese durch die Einführung der uneigentlichen Punkte erhaltenen Vorteile sind zu vergleichen mit jenen der Gleichungstheorie durch Einführung der komplexen Zahlen, wodurch ja der allgemeine Satz ausgesprochen werden kann: Jede Gleichung zweiten Grades hat stets und nur zwei Wurzeln. Jede Gleichung n-ten Grades hat stets und nur n Wurzeln (von denen auch mehrere zusammenfallen können). Während aber die imaginären Zahlen bei der Anwendung auf praktische Fälle im allgemeinen keine wirkliche Bedeutung be-

sitzen, hat hier ein uneigentlicher Punkt stets insofern doch eine wirkliche Bedeutung, als wir uns unter ihm eben das zugehörige wirkliche Strahlenbüschel vorzustellen haben.

Es sei noch folgendes bemerkt, auch für unsere späteren Betrachtungen: Haben wir uns zunächst auf das Dreiecksgebiet I beschränkt (Fig. 25), so können wir natürlich eine Ausdehnung aller Betrachtungen auf ein durch ein Dreieck II bestimmtes begrenztes Gebiet vornehmen, das mit dem Dreiecksgebiet I einen Teil gemeinsam hat, dann analog auch ein weiteres Dreiecksgebiet III, das mit dem Gebiet I oder II oder beiden wieder einen Teil gemeinsam hat, und so fort. Wir können dann von *„geometrischer Fortsetzung“* des ursprünglichen Gebietes I sprechen (ähnlich der sogenannten analytischen Fortsetzung in der Theorie der regulären Funktionen komplexen Argumentes). Bei weitergeführter geometrischer Fortsetzung können wir natürlich die Umgebung jedes einzelnen, vorgegebenen eigentlichen Punktes in die Gesamtheit der Dreiecksgebiete einbeziehen. Ja, wir können somit im Falle der *elliptischen* Geometrie die gesamte, in sich geschlossene Ebene umfassen. Doch wird es interessant sein, folgende Frage aufzuwerfen, die erst sehr viel später ihre Beantwortung finden kann:

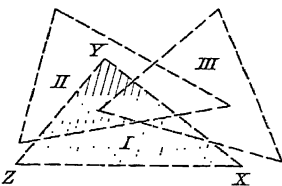



Fig. 25.

Ist es stets möglich, in der euklidischen oder hyperbolischen oder elliptischen Geometrie, eine gegebene endliche Anzahl von eigentlichen Punkten einer Ebene 𝔈, etwa vier Punkte, durch ein einziges wirkliches Dreieck einzuschließen, so daß also alle gegebenen Punkte innere Punkte dieses Dreiecks sind?

Die geometrische Fortsetzung über das gegebene Dreiecksgebiet I hinaus setzt uns bezüglich des Satzes 4 S. 33 nun in die Lage, *das Strahlenbüschel der Geraden k durch den äußeren (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkt O auch auf die angeschlossenen Dreiecksgebiete II, III, . . . zu erweitern.* Dies ist so einfach, daß wir wohl nicht näher darauf einzugehen brauchen. In dem gemeinsamen Teil zweier Dreiecksgebiete sind natürlich die Strahlen des Strahlenbüschels identisch.

Wir werden uns aber im folgenden wieder durchaus auf *ein* begrenztes Gebiet beschränken. Und in diesem Sinne können wir von dem Aufbau der projektiven Geometrie, auch im Hinblick auf die weiteren Entwicklungen dieses Paragraphen, schon jetzt vorahnend sagen, daß er vom Parallelenaxiom ganz unabhängig sein wird. In dem hier zunächst vorliegenden Falle zweier inneren, sich nicht im begrenzten Gebiet schneidenden Geraden g, h lassen wir eben die Frage ganz offen, ob die beiden Geraden sich wirklich schneiden oder

nicht, und sprechen vielmehr späterhin nur von ihrem äußeren Schnittpunkt (aber nicht von ihrem evtl. uneigentlichen Schnittpunkt).[1])

Wir wollen auch in aller Kürze von dem *Strahlenbündel im Raum* sprechen, das durch zwei sich nicht im begrenzten Gebiet (Tetraeder) schneidende innere Geraden g, h derselben Ebene bestimmt wird, wenn wir auch bei Beschränkung auf die *ebene* projektive Geometrie keinen Gebrauch von diesem Begriff machen werden. Wir wollen darunter die Gesamtheit der Strahlen k des durch g, h bestimmten Strahlenbüschels in der Ebene $\mathfrak{E}$ und der Strahlen l verstehen, welche sich als (eigentliche) Schnittgeraden irgend zweier durch g bzw. h gelegter Ebenen ergeben (Fig. 24b). Durch jeden eigentlichen Punkt M geht dann ersichtlich stets und nur ein Strahl hindurch. Würden die beiden Geraden sich wirklich schneiden, so würde diese Erklärung des Strahlenbündels ja alle durch den eigentlichen Schnittpunkt gehenden Geraden umfassen. Ein solches Strahlenbündel hat ja die einfache Eigenschaft, daß je zwei Strahlen desselben in einer Ebene liegen. Um nun für die erweiterte Erklärung des Strahlenbündels, insbesondere also für einen uneigentlichen Schnittpunkt von g und h, die gleiche Anwendungsmöglichkeit des Strahlenbündels zu erkennen, müssen wir die Behauptung nachweisen:

Fig. 26.

Auch wenn wir nicht wissen, ob die Geraden g, h sich in einem eigentlichen Punkte schneiden, so liegen doch je zwei Strahlen l, l' des Strahlenbündels stets in einer Ebene.

Zum Beweise nehmen wir zunächst an, daß die Strahlen l, l' *innere* Geraden seien. Wir denken zunächst durch drei innere Punkte D, M, M' bzw. auf g, l, l', wobei D nicht auf der Begrenzung des begrenzten Bereiches liegen möge (Fig. 26), eine Hilfsebene gelegt. Diese Hilfsebene mag nun die Gerade h

1) Als Literatur betreffs der Einführung uneigentlicher (oder idealer) Elemente sei hier genannt (vgl. auch die Anm. S. 33): F. Klein, Über die sogenannte nichteuklidische Geometrie, Math. Ann. Bd. 4, 1871, S. 624; Bd. 6, 1873, S. 131 u. 141, Ges. math. Abh., Bd. I, S. 244ff. — M. Pasch, Über die uneigentlichen Geraden und Ebenen, Math. Ann. Bd. 32, 1888, S. 148, sowie sein Buch: Grundlagen der Geometrie, 2. Aufl., 1926, § 6—8, S. 40ff. — F. Schur, Über die Einführung der sogenannten idealen Elemente in die projektive Geometrie, Math. Ann. Bd. 39, 1891, S. 113; Über die Grundlagen der Geometrie, Math. Ann. Bd. 55, 1902, S. 267 sowie das Buch: Grundlagen der Geometrie, a. a. O. S. 15—19. — R. Bonola, Giornale di mat. 38, 1900, S. 105. — F. Enriques, Enzyklopädieartikel a. a. O. S. 72. — Bei den bisherigen und noch folgenden Entwicklungen im Text haben wir uns unmittelbar an keine dieser Darstellungen angeschlossen.

im Punkt E im begrenzten Gebiet schneiden oder nicht. Im letzteren Falle schneidet jedenfalls die Hilfsebene die Ebene (g, h) in einer Geraden durch D. Nehmen wir dann auf dieser Schnittgeraden einen anderen Punkt E_0 an, so geht ja durch E_0 eine Gerade h_0 des Strahlenbüschels (g, h). Wir würden dann die Gerade h_0 an die Stelle von h treten lassen. Wir können also fernerhin annehmen, daß die Ebene DMM' die Gerade h im inneren Punkt E schneidet (Fig. 26). Nach dem Satze 4 S. 23 müssen dann jedenfalls zwei Verbindungsgeraden der vier Punkte M, M', D, E, welche alle vier Punkte enthalten, sich in einem inneren Punkte schneiden. (Hierbei ist es ja gleichgültig, ob die Ebene DMM' aus dem Tetraederraum ein Dreieck oder Viereck als begrenztes Gebiet dieser Ebene ausschneidet.) Schneiden sich nun DE und MM', etwa im inneren Punkte A, so geht durch A ja eine Gerade k des Strahlenbüschels (g, h) hindurch. Und diese Gerade k bedingt, daß die Ebenen (M, k) und (M', k) bzw. durch l und l' hindurchgehen, nach dem Satze 3, S. 32. Diese beiden Ebenen müssen aber identisch sein, da sie ja die Geraden MM' und k enthalten.

Wenn aber DE und MM' sich nicht in einem inneren Punkte schneiden, wohl aber MD und $M'E$ sich in einem inneren Punkte F schneiden (Fig. 26), so schneiden sich auch die Ebenen (g, l) und (h, l') in der durch F gehenden Geraden t. Die drei Geraden g, l, t gehören dann einem Strahlenbüschel ihrer Ebene an (vgl. den Satz 3 S. 32, auch die Fig. 24b daselbst, wobei die dort genannten Geraden g, h, k, l hier die Geraden g, l, t, h sind). Dann müssen die drei Geraden g, l, t aber auch von M' aus durch drei sich in derselben Geraden schneidende Ebenen projiziert werden, d. h. l, l' müssen in derselben Ebene liegen.

Wenn endlich nur ME und $M'D$ sich in einem inneren Punkte schneiden, so ist der gewünschte Beweis ganz analog dem soeben geführten. Hiermit ist also gezeigt: *Je zwei innere Geraden des Strahlenbündels lassen sich stets durch eine Ebene verbinden.*

Sind aber von den eigentlichen Strahlen l, l' beide oder einer nicht innere Geraden, so können wir ja auch hier im Raum das Prinzip der geometrischen Fortsetzung durch neue Tetraedergebiete (vgl. S. 35) anwenden. Damit ist dann leicht zu zeigen, daß zunächst im Falle l eine innere, aber l' eine nicht innere Gerade des ursprünglichen begrenzten Gebietes ist, l, l' stets wieder in einer Ebene liegen und endlich, daß dies auch für zwei nicht innere Geraden l, l' stattfindet. Hiermit ist dann allgemein bewiesen:

8. Je zwei Geraden l, l' des Strahlenbündels mit einem äußeren (eigentlichen oder uneigentlichen) Träger O liegen stets in einer Ebene.[1]) —

1) Vgl. wegen dieses Satzes M. Pasch, a. a. O. 1926, S. 33; F. Schur, Math. Ann. Bd. 39, 1891, S. 120—121, sowie die übrige auf S. 36 genannte Literatur.

Wir wollen nun aber auch *den Begriff der Geraden über die Gesamtheit derjenigen Geraden (der inneren Geraden) hinaus erweitern, von denen jedesmal eine Strecke oder doch ein Punkt dem begrenzten Gebiet angehört* (ja in der euklidischen und hyperbolischen Geometrie sogar über die Gesamtheit der Geraden, welche nach den Axiomen I, 1—2 sich als Verbindungslinien zweier eigentlicher Punkte ergeben).

Es seien in der Ebene 𝔈 z. B. zwei äußere Punkte Q_1, Q_2 gegeben, von denen jeder durch zwei Geraden g_1, h_1 bzw. g_2, h_2 des begrenzten Gebietes bestimmt sei. Wenn diese beiden Punkte Q_1, Q_2 *eigentliche* Punkte sind, so ordnen wir ihnen ja ohne weiteres gemäß der Ausdehnung der Axiome I, 1—2

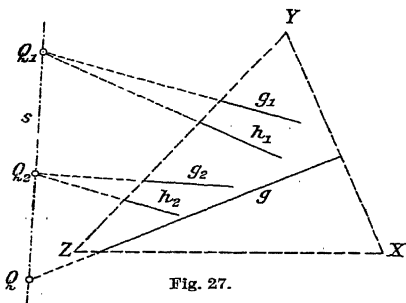
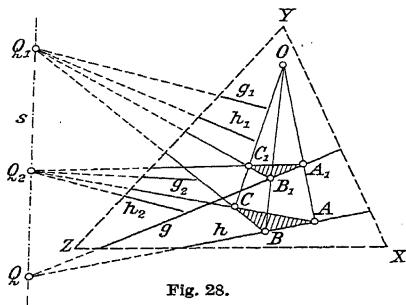



Fig. 27. Fig. 28.

eine Verbindungsgerade s zu; jede andere (innere) Gerade g der Ebene 𝔈 schneidet diese, wie wir sogleich noch näher sehen werden, in einem bestimmten (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkte (Fig. 27). Können wir aber in *jedem* Falle von einer *Verbindungsgeraden der äußeren Punkte* Q_1, Q_2 sprechen, also eben vor allem auch dann, wenn einer oder beide Punkte uneigentliche Punkte sind? Um diese Frage zu beantworten, wollen wir zunächst die *Aufgabe* lösen:

Es seien zwei äußere, aber e i g e n t l i c h e Punkte Q_1, Q_2 als Schnitte der inneren Geradenpaare g_1, h_1 und g_2, h_2 gegeben und außerdem eine innere Gerade g und ein innerer Punkt A außerhalb von ihr. Von dem Punkte A aus soll die Gerade h nach dem (eigentlichen oder uneigentlichen) Schnittpunkt Q der Geraden $s = Q_1Q_2$ und g gezogen werden, jedoch durch eine Konstruktion ganz innerhalb des begrenzten Gebietes (Fig. 28).

Um diese Aufgabe noch genauer zu präzisieren, können wir ja für einen Augenblick ein solches zweites Dreiecksgebiet hinzugenommen denken, daß in diesem die Geraden s und g *innere* Geraden sind und daher durch sie ersichtlich (vgl. S. 35) ein Strahlenbüschel mit dem (eigentlichen oder uneigentlichen) Schnittpunkt Q von s, g bestimmt ist. Es soll dann also durch A der zugehörige Strahl dieses Strahlenbüschels konstruiert werden.

Die Lösung unserer Aufgabe ist folgende:

Wir verbinden einen beliebigen inneren Punkt A_1 von g mit A, nehmen einen beliebigen inneren Punkt O auf AA_1, vielleicht außerhalb der Strecke AA_1 über A_1 hinaus an. Ferner nehmen wir einen zweiten inneren Punkt B_1 auf g an und ziehen die Verbindungslinien AQ_2, A_1Q_2 und B_1Q_1 (nach der Vorschrift der Fig. 23 S. 30). Den Schnittpunkt C_1 der beiden letzten verbinde man mit O; der Schnittpunkt von OC_1 und AQ_2 sei C. Die Verbindungslinie CQ_1 schneidet dann OB_1 im Punkte B, der mit A verbunden *die gesuchte Gerade h* liefert. Wir haben zunächst zu zeigen, daß *diese Konstruktion stets innerhalb des begrenzten Gebietes ausführbar ist.* Wir wollen uns hier mit folgender Bemerkung begnügen: Es ergibt sich dies eben daraus, daß wir ja den Punkt B_1 „sehr nahe" an A_1 wählen können; dann fällt auch C_1 sehr nahe an A_1 und die Punkte B, C sehr nahe an A. Ob der Schnittpunkt Q von s und g aber ein eigentlicher Punkt ist oder nicht, ist ersichtlich bei der Ausführung der Konstruktionen ganz gleichgültig.

Die *Richtigkeit dieser „Desarguesschen Konstruktion"* ferner folgt unmittelbar aus dem Desarguesschen Satze. Wir brauchen ja nur, um dies zu erkennen, wieder die ganze Figur von einem außerhalb ihrer Ebene $\mathfrak{E}$ gelegenen inneren Punkte M zu projizieren und alle Projektionsstrahlen durch eine Ebene $\mathfrak{S}$ in inneren Punkten, gemäß dem Satze 6 S. 24, zu schneiden. Ersichtlich gehen dann die drei Ebenen (M, g), (M, h) und (M, s) durch dieselbe Gerade l. *Die Geraden g, h, s gehören also demselben „Strahlenbüschel" an*, mag der Punkt Q ein eigentlicher oder uneigentlicher Punkt sein.

Nun bemerken wir jedoch wieder, *daß die auszuführende Konstruktion ja ganz davon unabhängig ist, ob die gegebenen Punkte Q_1, Q_2 eigentliche Punkte sind oder nicht.* Wir können diese Konstruktion dann jedenfalls auch in dem Falle ausgeführt denken, daß *einer oder beide Punkte Q_1, Q_2 uneigentliche Punkte sind,* mag dabei der Schnittpunkt Q sich wieder als ein eigentlicher Punkt ergeben oder nicht. Es bleibt dann aber noch notwendig nachzuweisen, daß *die gefundene Gerade h stets unabhängig ist von der Wahl der willkürlichen Punkte bei der Konstruktion.* Wir denken also noch eine zweite Konstruktion ausgeführt, von der wir annehmen, daß sie uns die Gerade h' durch A liefere. Dann projizieren wir wieder die ganze Figur der beiden Konstruktionen von einem außerhalb ihrer Ebene $\mathfrak{E}$ gelegenen inneren Punkte M auf eine zweite Ebene $\mathfrak{S}$ so, daß in dieser (gemäß dem Satze 6 S. 24) alle entsprechenden Punkte $Q_1{}^0$, $Q_2{}^0$, A_0, B_0, C_0, ... im begrenzten Gebiet liegen. In der Ebene $\mathfrak{S}$ sind dann alle aus den gegebenen Punkten und Geraden entstandenen Punkte und Geraden bei den beiden Konstruktionen identisch, nämlich die Punkte $Q_1{}^0$, $Q_2{}^0$ und damit ihre Verbindungslinie s_0, ebenso A_0, g_0 und der Schnittpunkt Q_0 von g_0 und s_0. Die auf die Ebene $\mathfrak{S}$ übertragenen beiden Konstruktionen stellen aber jedesmal den gewöhnlichen Satz von Desargues dar. Folglich muß für

beide Konstruktionen sich dieselbe Gerade $h_0 = A_0 Q_0$ ergeben und damit auch *dieselbe Gerade* $h = h'$ *in der Ebene* $\mathfrak{E}$.

Wenn man will, kann man jetzt wieder folgende *einfache räumliche Konstruktion der gesuchten Geraden* h anwenden: Von einem beliebigen inneren Punkte M außerhalb der Ebene $\mathfrak{E}$ seien alle gegebenen Stücke derselben projiziert (Fig. 29; es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, daß in dieser wie analogen späteren Figuren alles, was außerhalb des begrenzten Gebietes liegt, nur der besseren Übersicht wegen hinzugefügt ist). Die Geraden g_1, h_1 liefern dann als Schnitt der Ebenen (M, g_1) und (M, h_1) die Gerade l_1, analog die Geraden g_2, h_2 die Gerade l_2. In der Ebene (l_1, l_2) wird weiter durch die Ebene (M, g) eine Gerade l bestimmt. Die Ebene (l, A) schneidet dann die Ebene $\mathfrak{E}$ in der gesuchten Geraden h. Dies Resultat der Konstruktion ist ersichtlich auch von der Wahl des Punktes M unabhängig (eben deswegen, weil diese Konstruktion stets zu derjenigen Geraden h führt, die wir auch allein durch eine ebene Konstruktion gewinnen konnten). Somit sind wir also nun dazu geführt, *in jedem Falle auch zwei äußeren Punkten* Q_1, Q_2 *eine bestimmte Verbindungslinie* s *zuzuordnen, in dem Sinne, daß eben jede innere Gerade* g *einen bestimmten Schnittpunkt mit ihr besitzt.*

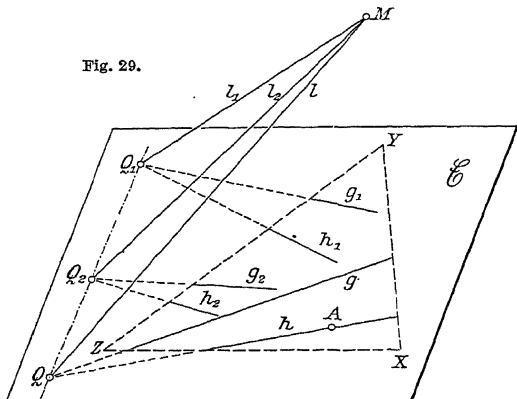



Fig. 29.

Die Natur der Verbindungslinie kann natürlich eine ganz verschiedene sein. Es ist z. B. sehr wohl möglich, daß die Verbindungslinie $Q_1 Q_2$ eine *innere* Gerade ist, (d. h. mit einer Strecke oder doch einem Punkte dem begrenzten Gebiet angehört). Wir brauchen ja nur umgekehrt von einer solchen Geraden auszugehen, auf der wir die Punkte Q_1, Q_2 als äußere Punkte wählen (Fig. 30). Daß die Verbindungslinie Q_1, Q_2 auch eine außerhalb des begrenzten Gebietes liegende, eigentliche (oder wirkliche) Gerade sein kann, ist auch selbstverständlich. Bei diesen Möglichkeiten kann evt. noch jeder der Punkte Q_1, Q_2 ein eigentlicher Punkt sein oder nicht.

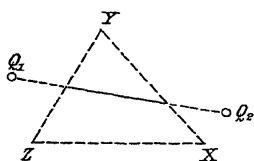



Fig. 30.

In der *elliptischen Geometrie* allerdings kommen ja andere Möglichkeiten als die, daß Q_1, Q_2, eigentliche Punkte sind und ihre Verbindungslinie eine eigentliche Gerade ist, nicht in Betracht. In der *euklidischen Geometrie*

kann die Verbindungslinie $Q_1 Q_2$ außer den bereits genannten Möglichkeiten noch die unendlich ferne Gerade sein, die dann als einzige „uneigentliche Gerade" zu bezeichnen ist. Um auch in der *hyperbolischen Geometrie* schon jetzt einen Überblick über die verschiedenen Möglichkeiten zu geben, werfen wir einen Blick zurück auf die einleitenden Betrachtungen S. 17, ohne hier schon einen strengen Beweis für die folgende Bemerkung zu geben: Eine Ebene $\mathfrak{F}$ durch L kann den dort eingeführten Kegel entweder in zwei (reellen) Erzeugenden schneiden oder ihn berühren oder sie schneidet ihn überhaupt nicht. Entsprechend werden wir als Schnittlinie der Ebene $\mathfrak{F}$ mit der Ebene $\mathfrak{E}$ eine *eigentliche* Gerade, eine *unendlich ferne Gerade*, d. h. eine solche, die *nur einen unendlich fernen* und sonst nur überunendlich ferne Punkte enthält, oder eine *überunendlich ferne Gerade*, d. h. eine solche, die *nur überunendlich ferne Punkte* enthält, gewinnen. Von den eigentlichen Geraden nannten wir bereits *innere* diejenigen, von denen eine Strecke oder doch ein Punkt dem begrenzten Gebiet angehört, die übrigen Geraden sollen nunmehr *äußere Geraden* heißen. Demnach gewinnen wir folgende Übersicht über die Geraden der hyperbolischen Ebene bei angenommenem begrenzten Gebiet:

Geraden der hyperbolischen Ebene

innere — äußere

endlich ferne — unendlich ferne — überunendlich ferne

(innere + endlich ferne:) eigentliche — (unendlich ferne + überunendlich ferne:) uneigentliche

Erst viel später (Bd. II, S. 51, Satz 17) werden wir, wie gesagt, diese Einteilung genauer übersehen und in aller Strenge *ableiten*. Im Anschluß an die Lösung der Aufgabe S. 38 können wir nun auch als Resultat den wichtigen Satz aufstellen:

9. Durch je zwei innere oder äußere (eigentliche oder uneigentliche) Punkte Q_1, Q_2 ist stets und nur eine (eigentliche oder uneigentliche) Verbindungsgerade s bestimmt.

Dann aber bietet sich sogleich noch die weitere *Aufgabe* dar:

Zwei durch je zwei äußere Punkte Q_1, Q_2 bzw. Q_3, Q_4 bestimmte (verschiedene) Geraden t_1, t_2 zum Schnitt zu bringen, d. h. es sollen zwei innere Geraden g, h so bestimmt werden, daß ihr Schnittpunkt T jeder der beiden Geraden t_1, t_2 angehört (Fig. 31).

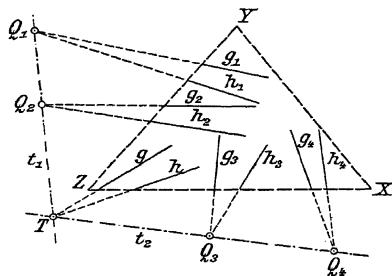



Fig. 31.

Durch die Lösung dieser Aufgabe soll eben auch der Nachweis erbracht

werden, daß solche zwei Geraden t_1, t_2 auch stets einen und nur einen Schnittpunkt besitzen.

Zwei Lösungen kann die Aufgabe offenbar nicht besitzen. Denn wenn es zwei solche Paare von Geraden g, h und g', h' geben würde, die nicht demselben Strahlenbüschel angehören, also zwei verschiedene Punkte T, T' bestimmen, dann würde es ja auch zwei Verbindungsgeraden t_1, t_2 der Punkte T, T' geben, was nach dem letzten Satze 9 unmöglich ist.

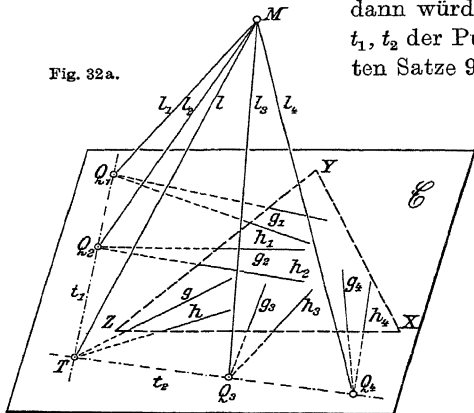
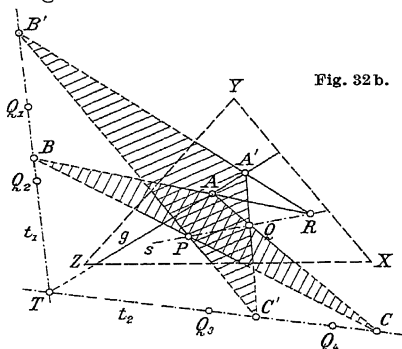



Fig. 32a. Fig. 32b.

Wir können nun leicht die Lösung unserer Aufgabe durch eine *räumliche* Konstruktion gewinnen. Wir projizieren die ganze Figur der Ebene $\mathfrak{E}$ von einem außerhalb gelegenen Punkte M aus (Fig. 32a). Die Ebenenpaare (M, g_i) und (M, h_i) (für $i = 1, 2, 3, 4$) bestimmen nun die vier Schnittgeraden l_i und die Ebenen (l_1, l_2) und (l_3, l_4), weiter eine Schnittgerade l. Die Ebenen (l_1, l_2) und (l_3, l_4) können nämlich nicht identisch sein, da sonst auch die Geraden t_1, t_2 identisch sein müßten. Zwei beliebige Ebenen durch l schneiden dann die Ebene $\mathfrak{E}$ in zwei Geraden g, h, deren Schnittpunkt der gesuchte Schnittpunkt T der Geraden t_1, t_2 ist. Denn es liegt der durch die Geraden g, h bestimmte Punkt gemäß den sich an die Figuren 28 und 29 anschließenden Betrachtungen auf jeder der Geraden t_1, t_2.

Die *ebene* Konstruktion zur Lösung der vorliegenden Aufgabe läßt sich im begrenzten Gebiet, wie folgt, ausführen (Fig. 32b). Wir nehmen eine beliebige innere Gerade s an und ziehen von einem beliebigen inneren Punkte P auf ihr zwei beliebige Geraden, welche die Geraden t_1, t_2 in den (im allgemeinen nicht inneren) Punkten B, B' bzw. C, C' schneiden mögen. Dann ziehen wir von einem zweiten inneren Punkte Q der Geraden s aus die Verbindungslinien QC und QC' (nach der Vorschrift der Fig. 28 S. 38). Endlich ziehen wir von einem dritten inneren Punkte R auf s aus die Verbindungslinien RB und RB', welche die Geraden QC und QC' bzw. in den Punkten A und A' schneiden.

Die Wahl des Punktes R können wir immer so treffen, daß die Punkte A und A' innere Punkte sind, da die Punkte A und A' mit Q zusammenfallen, wenn auch R mit Q zusammenfällt. Die Verbindungslinie AA' ist dann eine Gerade g, die durch den Schnittpunkt T von t_1, t_2 hindurchgeht. Analog ist noch eine zweite Gerade h durch T festzulegen. Zum Beweise der Konstruktion braucht man nur die ganze Figur wieder von einem außerhalb ihrer Ebene liegenden inneren Punkte M auf eine Ebene $\mathfrak{S}$ so zu projizieren, daß allen Punkten $A, B, C, \ldots$ der Konstruktion in der Ebene $\mathfrak{E}$ innere Punkte A_0, $B_0, C_0, \ldots$ von $\mathfrak{S}$ entsprechen (vgl. den Satz 6 S. 24). Dann gewinnen wir in der Ebene $\mathfrak{S}$ die gewöhnliche Figur des Satzes von Desargues mit den beiden perspektiven Dreiecken $A_0B_0C_0$ und $A_0'B_0'C_0'$. Also gehen die drei Ebenen (M, t_1), (M, t_2) und (M, g) durch dieselbe Schnittgerade l hindurch, woraus die Richtigkeit der Konstruktion (in Übereinstimmung mit der räumlichen Konstruktion) folgt. (Natürlich können wir bei dieser Konstruktion evtl. einige der gegebenen Geraden g_i, h_i (Fig. 31) weiter benutzen, z. B. evtl. den Punkt P als Schnittpunkt der Geraden g_3, h_2 und diese selbst als die Geraden durch P wählen.) *Durch die beiden, dem Vorstehenden gemäß konstruierten inneren Geraden g, h ist also wieder im begrenzten Gebiet der Schnittpunkt T von t_1, t_2 festgelegt.*

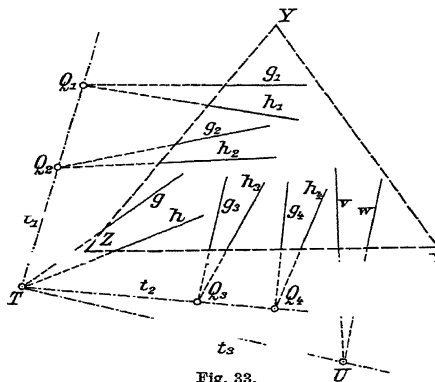



Fig. 33.

Ist weiter etwa noch ein beliebiger äußerer Punkt U durch ein inneres Geradenpaar v, w gegeben, so wird durch die beiden Geradenpaare g, h und v, w auch die Verbindungslinie $TU = t_3$ festgelegt, d. h.: *Es ist jetzt hiermit auch der Punkt U mit dem Schnittpunkt T von t_1, t_2 verbunden* (Fig. 33).

Die Lösung der letzten Aufgabe gestattet uns nun, dem Satze 9 S. 41 den allgemeineren Satz als endgültige Erweiterung des Satzes 6 S. 34 zur Seite zu stellen:

10. Je zwei beliebige innere oder äußere (eigentliche oder uneigentliche) Geraden (deren jede evtl. durch zwei Punkte bestimmt ist) haben stets und nur einen Schnittpunkt.

Wir können nunmehr also in der Ebene $\mathfrak{E}$ je zwei beliebige Punkte miteinander verbinden bzw. je zwei beliebige Geraden miteinander schneiden und zwar stets durch Konstruktionen in dem gewählten begrenzten Gebiet. Das Ver-

fahren des Projizierens und Schneidens, das S. 22 ausführlich besprochen ist, läßt sich also stets ausführen.

Von dem begrenzten Gebiet aus beherrschen wir demnach die ganze Ebene mit allen eigentlichen und uneigentlichen Punkten und Geraden. Das begrenzte Gebiet ist gleichsam das Generalstabsquartier, von dem aus alle Truppenkörper, die aus Punkten und Geraden bestehen, in dem beliebig ausgedehnten Schlachtfeld der projektiven Ebene überblickt und gelenkt werden können. Alle äußeren Punkte und Geraden finden ja auch ihr *anschauliches Erfassen* innerhalb des begrenzten Gebietes, ein äußerer Punkt durch ein Paar innerer Geraden, eine äußere Gerade durch zwei Paare innerer Geraden (Fig. 27 S. 38). Die projektive Geometrie des begrenzten Bereiches ist zugleich die projektive Geometrie der ganzen Ebene. Da wir uns hierbei gar nicht darum zu kümmern brauchen, ob ein äußerer Punkt oder eine äußere Gerade ein eigentliches oder ein uneigentliches Element ist, so ist es uns bei der Entwicklung der projektiven Geometrie auch ganz gleich, welches Parallelenaxiom später von uns einmal eingeführt werden soll. *Vorläufig ist unsere ganze Betrachtung völlig von jedem Parallelenaxiom unabhängig.* Wir unterscheiden in Zukunft eben nur *innere* und *äußere* Punkte und Geraden; ob ein äußerer Punkt oder eine äußere Gerade später bei Einführung eines Parallelenaxioms ein eigentliches oder uneigentliches Element wird, ist uns jetzt ganz gleichgültig. Wenn wir bisher schon von den drei Geometrien im einzelnen gesprochen haben, so geschah es nur aus pädagogischen Gründen, um unsere Betrachtung verständlich zu machen. Logisch notwendig war dies aber gewiß nicht.

Bei der von uns selbst gewünschten Beschränkung auf die Ebene (vgl. S. 18) haben wir hier keine Veranlassung, nun auch die vorstehenden Betrachtungen auf den Raum zu erweitern. Hier kommt insbesondere noch die Einführung von *uneigentlichen Ebenen* in Betracht, und es gilt, die allgemeinen Sätze zu beweisen:

11. Drei beliebige, innere oder äußere (eigentliche oder uneigentliche) Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, bestimmen stets und nur eine Ebene.

12. Zwei beliebige (eigentliche oder uneigentliche) Ebenen haben stets eine und nur eine Schnittgerade.

13. Drei beliebige, innere oder äußere (eigentliche oder uneigentliche) Ebenen, die nicht durch eine Gerade gehen, haben stets und nur einen Schnittpunkt.

14. Eine beliebige Gerade und ein beliebiger, nicht auf der Geraden liegender Punkt haben stets eine und nur eine Verbindungsebene.

15. Eine beliebige Gerade und eine beliebige, nicht durch die Gerade gehende Ebene haben stets und nur einen Schnittpunkt.[1])

1) Vgl. deswegen z. B. M. Pasch, a. a. O. 1926, § 6, 7 u. 8.

Als wichtiges Resultat unserer Einführung der uneigentlichen Punkte und Geraden in der Ebene 𝔈 können wir noch hervorheben:

16. Nun läßt sich auch der Satz 7 von Desargues (S. 25) *so ausdehnen, daß jeder der in diesem Satze vorkommenden Punkte und Geraden ein inneres oder äußeres (eigentliches oder uneigentliches) Element sein kann.*

Von einem inneren Punkte M außerhalb der Ebene 𝔈 der Desarguesschen Figur können wir ja diese stets auf eine andere Ebene 𝔖 so projizieren, daß diese neue Figur den gewöhnlichen Desarguesschen Satz im begrenzten Gebiete darstellt.[1]) Die Richtigkeit des allgemeinen Desarguesschen Satzes aber folgt dann sogleich aus den allgemeinen, aus unseren bisherigen Betrachtungen folgenden Sätzen:

17. Drei beliebige Punkte der Ebene 𝔈 liegen in derselben Geraden, wenn sie von einem außerhalb 𝔈 gelegenen, inneren Punkt M aus durch drei Strahlen derselben Ebene projiziert werden. (Vgl. die Erweiterung der Aufgabe S. 38 und die Fig. 29.)

18. Drei beliebige Geraden der Ebene 𝔈 gehen durch denselben Punkt, wenn sie von einem außerhalb 𝔈 gelegenen inneren Punkte M durch drei sich in derselben Geraden schneidende Ebenen projiziert werden. (Vgl. den Satz 4 S. 33 und die Fig. 24b S. 32).

Diesen Sätzen entspricht dann aber der folgende nur die Ebene 𝔈 benutzende Satz:

19. Drei beliebige Punkte der Ebene 𝔈 liegen in derselben Geraden s bzw. drei beliebige Geraden gehen durch denselben Punkt T, wenn die drei gegebenen Elemente entsprechend durch eine Figur des Desarguesschen Satzes mit einander verknüpft sind. (Vgl. die Fig. 28 S. 38 und die Figuren 32b und 33.)

Überhaupt können wir zum Schluß unserer Betrachtungen über uneigentliche Elemente die Sätze aussprechen:

20. Eine beliebige Gerade g ist jetzt durch Hinzunahme der uneigentlichen Punkte auch in der euklidischen und in der hyperbolischen Geometrie, ebenso wie in der elliptischen Geometrie, eine in sich geschlossene Linie geworden (vgl. den Satz 7 S. 34) und:

21. Die ganze projektive Ebene ist durch Hinzunahme der uneigentlichen Elemente ebenfalls in allen drei Geometrien eine in sich geschlossene singularitätenfreie Fläche geworden.

Analog ist uns eine andere solche Fläche mit nur eigentlichen Punkten ja in der Kugeloberfläche der euklidischen Geometrie wohlbekannt. Wir werden

1) Vgl. auch den analogen Satz des Strahlenbündels M in der Anm. S. 28.

später (S. 207) indes noch auf den Unterschied der projektiven Ebene und der Kugel eingehend zurückkommen.

Der letzte Satz wird uns noch nähergeführt durch folgende Bemerkung: Von der *ganzen* projektiven Ebene können wir uns ja unseren Betrachtungen gemäß eine anschauliche *Abbildung* schaffen durch die Projektion aller (eigentlichen und uneigentlichen) Punkte und Geraden der Ebene 𝔈 von einem außerhalb gelegenen, inneren Punkte M aus. *Jedem* Punkt entspricht der ihn projizierende Strahl durch M und *jeder* Geraden die sie projizierende Ebene durch M.

22. Das Strahlenbündel durch M bildet also die Gesamtheit aller Punkte der Ebene 𝔈, das ebene Punktfeld 𝔈, ab und das Ebenenbündel durch M die Gesamtheit aller Geraden der Ebene 𝔈, das ebene Geradenfeld 𝔈.

§ 5. Die Zentralkollineation.

Wir wollen nun ein neues wichtiges Hilfsmittel für unsere weitere Untersuchung kennenlernen, das wir als eine Erweiterung des Satzes von Desargues bezeichnen können, die *Zentralkollineation.*

Mit dieser hat es folgende Bewandtnis: Es sei eine Gerade s, ein Punkt O und auf einer Geraden durch O ein Paar „entsprechender" Punkte A, A' gegeben (Fig. 34). [In speziellen Fällen kann jedoch O auch auf s liegen; doch sollen die Punkte A, A' von O verschieden sein und nicht auf s liegen (vgl. die Fig. 17a—c S. 26).] Es ist aber gleichgültig, ob die Punkte A, A' durch O und s voneinander getrennt werden, wie in der Figur, oder nicht. Zu einem anderen Punkte B werden wir wie folgt ebenfalls einen entsprechenden Punkt B' konstruieren: Die Gerade AB schneide die Gerade s im Punkt R. Wir verbinden dann auch A' mit R. Der Punkt B sei dann der Schnittpunkt dieser letzten Verbindungsgeraden mit der Geraden OB. Ist noch ein dritter Punkt C gegeben, so können wir analog mit Hilfe des Schnittpunktes Q von CA und s den entsprechenden Punkt C' auf $A'Q$ durch OC finden. Dann gilt aber für die beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Voraussetzung des direkten Desarguesschen Satzes. Folglich schneiden sich auch die Geraden BC und BC' in einem Punkte P auf s. Wir hätten demgemäß, um zu C den entsprechenden Punkt C' zu bestimmen, auch den Schnittpunkt P von BC und s mit B' verbinden und dann OC mit $B'P$ im Punkt C' schneiden können. Es ergibt sich also:

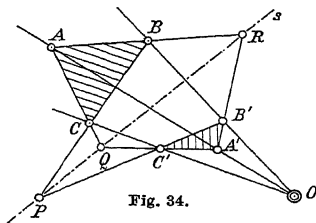
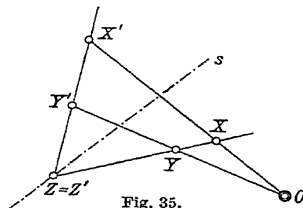



Fig. 34.

1. Man kann zu jedem beliebigen Punkt Y stets eindeutig einen entsprechenden

Punkt Y' so bestimmen, daß man den Punkt Y mit dem Punkt X eines beliebigen schon vorher bestimmten Paares entsprechender Punkte X, X' bis zum Schnitt Z auf s verbindet, sodann die Gerade $X'Z$ zieht und mit ihr OY im Punkt Y' zum Schnitt bringt (Fig. 35). *Eine solche Zuordnung der Punkte in der projektiven Ebene nennen wir eine Zentralkollineation (oder eine Zentralverwandtschaft).*

Fig. 35.

Hierbei haben wir uns die projektive Ebene eigentlich *doppelt überdeckt* zu denken und an jeder Stelle werden die beiden übereinanderliegenden Punkte dann dadurch unterschieden, daß bei ihrer Bezeichnung die Punkte oder Geraden der einen Überdeckung durch einen Strich angegeben sein sollen. Hervorgehoben sei jedoch ausdrücklich: Gemäß dem allgemeinen Satze 16 von Desargues der Seite 45 ist es gleichgültig, ob die gegebenen Stücke O, s und A, A' innere oder äußere (eigentliche oder uneigentliche) Elemente sind. Auch die Zuordnung neuer Punkte Y, Y' erstreckt sich sowohl auf innere wie auf äußere (eigentliche oder uneigentliche) Punkte. Wir können daher hier, wie analog in Zukunft, stets auch das begrenzte Gebiet hinzuzuzeichnen unterlassen.

Wir nennen nun O das *Zentrum*, s die *Achse der Zentralkollineation*, die Strahlen durch O, welche entsprechende Punkte einander zuordnen, die *Kollineationsstrahlen*. Die Punkte $A, B \ldots X, Y \ldots$ der einen Überdeckung werden wir ferner als *Originalpunkte*, die entsprechenden Punkte $A', B' \ldots X', Y' \ldots$ der anderen Überdeckung als *Bildpunkte* bezeichnen; analog werden wir von *Original- und Bildgeraden, Original- und Bildfiguren* sprechen. Es gelten nun ersichtlich folgende einfachen Sätze:

2. *Jedem von O verschiedenen Originalpunkt entspricht eindeutig ein Bildpunkt und umgekehrt. Entsprechende solche Punkte liegen auf einem Kollineationsstrahl.*

3. *Die Kollineationsachse s entspricht sich punktweise selbst* ($Z = Z'$ in der Fig. 35).

4. *Jeder Originalgeraden entspricht eine Bildgerade und umgekehrt* (d. h.: Je drei Originalpunkten in gerader Linie entsprechen auch drei Bildpunkte in gerader Linie und umgekehrt). *Entsprechende Geraden schneiden sich auf der Kollineationsachse.*

5. *Jede Gerade durch O entspricht sich selbst.*

6. *Auch das Zentrum O soll sich selbst entsprechen.* (Jedem von O verschiedenen Punkt X entspricht ja ersichtlich ein ebenfalls von O verschiedener Punkt X' und umgekehrt.)

7. Eine Zentralkollineation ist bestimmt durch ihr Zentrum O, ihre Achse s und ein Paar entsprechender Punkte auf einem Kollineationsstrahl oder auch durch ihr Zentrum und drei Paare entsprechender Punkte auf drei Kollineationsstrahlen oder auch durch ihre Achse und zwei Paare entsprechender Punkte auf zwei sich auf s schneidenden Geraden.

Die Zentralkollineation ist also insofern eine *Erweiterung des Desarguesschen Satzes* oder des Satzes von den perspektiven Dreiecken, als nunmehr an die Stelle der Dreiecke „perspektive Figuren“ überhaupt treten.

Es sei jedoch ausdrücklich auch darauf hingewiesen, daß in der euklidischen und hyperbolischen Geometrie einem eigentlichen Originalpunkt sehr wohl ein uneigentlicher Bildpunkt entsprechen kann, ebenso einer eigentlichen Originalgeraden eine uneigentliche Bildgerade und umgekehrt. Wir sind daher durch die Zentralkollineation in der Lage, die projektive Ebene so umzuformen, daß wir gleichsam hinter die Kulissen des Unendlichen und Überunendlichen sehen können, d. h. daß sogar ein aus uneigentlichen Punkten bestehendes Gebiet, das also in Wirklichkeit gar nicht existiert, mit irgendwelchen Figuren darin in ein aus eigentlichen Punkten bestehendes Gebiet transformiert werden kann.

Wir wollen diesen Gedanken noch wie folgt näher ausführen: Es sei irgendeine Figur mit einer endlichen Anzahl wesentlich in Betracht kommender innerer oder äußerer (eigentlicher oder uneigentlicher) Punkte in der Ebene 𝔈 gegeben. Wird dann die ganze Figur von einem außerhalb ihrer Ebene gelegenen Punkte M projiziert, so kann man nach dem Satze 6 S. 24 und der sich anschließenden Überlegung *ein Doppeldreikant mit der Spitze in M so angeben, daß alle die einzelnen Punkte projizierenden Strahlen „innerhalb“ des Dreikants liegen.* (Hier ist auf das Dreikant der Satz zu übertragen: Ein Punkt S liegt im Innern eines Dreiecks ABC mit inneren oder äußeren Eckpunkten, wenn die Geraden AS, BS und CS bzw. die Seiten BC, CA und AB des Dreiecks schneiden (Fig. 36; vgl. den Satz 1 S. 22). *Ein Dreieck oder eine Dreiecksfläche aber ist hier ganz allgemein als eines der vier Gebiete definiert, in welche drei beliebig gegebene innere oder äußere Geraden, die ganze projektive Ebene zerlegen* (Fig. 37), wie analog drei Ebenen durch den inneren Punkt M das Strahlenbündel mit dem Träger M in vier Dreikantgebiete zerlegen. Zwei beliebig gegebene innere oder äußere Geraden zerlegen analog die ganze projektive Ebene natürlich in zwei Gebiete.) Wird das gewonnene Dreikant nun durch die Ebene 𝔈 geschnitten, so erhalten wir in ihr ein *Dreieck ABC derart, daß*

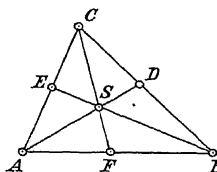
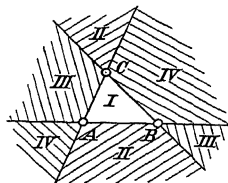



Fig. 36.

Fig. 37.

alle Punkte der Figur „innerhalb“ desselben liegen (Fig. 38). Wir ziehen nun von einem beliebigen inneren Punkte O der Ebene $\mathfrak{E}$ aus die Strahlen nach den Eckpunkten A, B, C des Dreiecks. Durch die Geraden OA und OB wird ja die ganze projektive Ebene in zwei Gebiete zerlegt. Wir richten unser Augenmerk besonders auf dasjenige dieser beiden Gebiete, dem auch die Seite AB des Dreiecks ABC angehört. Dann erkennen wir leicht, daß wir auf den Geraden OA und OB zwei innere Punkte A', B' stets so wählen können, daß auch die nur innere Punkte enthaltende Strecke $A'B'$ mit allen ihren Punkten von O aus in die Dreiecksseite AB projiziert wird. Sodann achten wir weiter auf dasjenige von den beiden Geraden OA und OC begrenzte Gebiet, in dem auch die Seite AC gelegen ist. Zu dem Punkte A' können wir dann stets einen Punkt C' auf der Geraden OC so wählen, daß auch die nur innere Punkte enthaltende Strecke $A'C'$ mit allen ihren Punkten von O aus in die Dreiecksseite AC projiziert wird. Durch die einander entsprechenden Punktetripel A, B, C und A', B', C' ist aber eindeutig eine Zentralkollineation festgelegt mit dem Punkte O als Zentrum und derjenigen Geraden s als Kollineationsachse, welche durch die Schnittpunkte P, Q, R entsprechender Seiten der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ bestimmt ist. Wir behaupten, daß *nunmehr durch diese Zentralkollineation ein beliebiger* i n n e r l i c h *gelegener Punkt S des Dreiecks ABC stets in einen* i n n e r l i c h *gelegenen Punkt S' des im begrenzten Gebiet gelegenen Dreiecks $A'B'C'$ übergeht.*

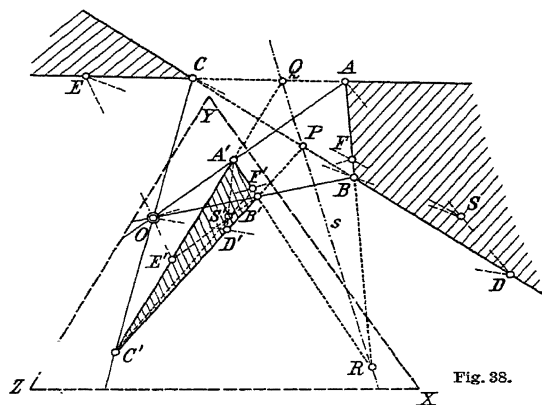



Fig. 38.

Schneidet nämlich bei einem solchen Punkt S die Gerade BS die Seite AC im Punkte E und die Gerade CS die Seite AB in einem Punkt F, so entsprechen ja den Punkten E und F zwei Punkte E' und F' der Seiten $A'C'$ und $A'B'$, also dem Punkt S tatsächlich der innerlich gelegene Punkt S' des Dreiecks ABC, der als Schnitt von $B'E'$ und $C'F'$ sich ergibt.

Damit wird dann auch die ursprünglich gegebene Figur der Ebene $\mathfrak{E}$ mit allen ihren Punkten durch die Zentralkollineation in eine andere übergeführt, deren wesentliche Punkte i n n e r e *Punkte des begrenzten Gebietes sind.* Dem Satze 6 S. 24 tritt also der folgende Satz zur Seite:

8. *Ist eine beliebige, doch endliche Anzahl von inneren und äußeren Punkten*

der Ebene 𝔈 gegeben, so kann man stets eine solche Zentralkollineation angeben, daß durch sie sämtliche gegebenen Punkte in innere Punkte übergehen.

Dem letzten Satze können wir auch den folgenden erweiterten zur Seite stellen:

9. Wir können stets ein beliebiges Dreieck mit allen innerhalb gelegenen Punkten (auch wenn also jetzt beliebig viele solche Punkte als wesentlich in Frage kommen) *durch eine geeignet gewählte Zentralkollineation so umformen, daß sein Abbild innerhalb des begrenzten Gebietes liegt.*

Wir beherrschen damit auch *anschaulich* in einfachster Weise alle solche gegebenen Figuren mit inneren und äußeren wesentlichen Punkten, eben durch ihr, wie angegeben, zu findendes Abbild im begrenzten Gebiet. In der Ebene ist somit das gleiche erreicht, was wir sonst durch Projektion der Ebene 𝔈 von einem außerhalb gelegenen inneren Punkt M auf eine andere Ebene 𝔖 gewonnen haben (vgl. eben den Satz 6 S. 24). Die Sätze 8 und 9 setzen uns demnach in die Lage, in Zukunft gegebenenfalls nicht mehr räumliche Konstruktionen oder Betrachtungen zu Hilfe nehmen zu müssen, sondern uns auf die Ebene 𝔈 selbst beschränken zu können, auch von gegebenen Figuren in der Ebene 𝔈 anschauliche Abbildungen wirklich zeichnen zu können. —

Wir wollen jetzt noch folgenden Satz anschließen, bei dem die einfachen Projektionen auch durch Zentralkollineationen ersetzt werden können, wenn man will:

10. Sind zwei beliebige Strecken AP und A_0P_0 auf verschiedenen Geraden so gegeben, daß A_0 nicht auch auf der Geraden AP liegt, so können wir stets die erste Strecke AP von einem Punkte M_1 auf eine neue Strecke A_0P_1, darauf diese von einem Punkte M_2 auf die Strecke A_0P_0 projizieren (Fig. 39).

Hierbei können wir den Punkt M_1 noch beliebig auf der Geraden AA_0 wählen; auch die Gerade g_1, auf welche die Strecke AP nach A_0P_1 projiziert wird, kann beliebig durch A_0 gelegt werden (sie kann auch die Gerade A_0P sein, so daß $P_1 = P$ ist). Der Punkt M_2 dagegen ist auf der Seitengeraden P_0P_1 desjenigen Dreiecks $A_0P_0P_1$, welches die Strecken A_0P_1 und A_0P_0 als Seiten enthält, als ein nicht auf der Seite P_0P_1 gelegener Punkt zu wählen. Nach dem Satze 8 können wir ja die ganze Figur durch eine Zentralkollineation in eine analoge Figur innerhalb des begrenzten Gebietes überführen, so daß also alle drei Strecken AP, A_0P_1 und A_0P_0 mit allen ihren Punkten dem begrenzten Gebiet angehören. Wählen wir der Einfachheit halber für dieses Abbild der ursprünglichen Figur, das nun etwa durch die Figur 39 dargestellt sei, dieselben Buchstaben, so muß ja jede Gerade M_2X_1, wo X_1 zwischen A_0, P_1 liegt, das Dreieck $A_0P_0P_1$ noch in einem Punkte X_0 zwischen

A_0, P_0 schneiden, da ja M_2 nicht zwischen P_0, P_1 liegen soll. Das Analoge gilt dann für die ursprüngliche Figur.

Wenn aber bei den beiden Strecken $A\,P$ und A_0P_0 der Punkt A_0 auch auf $A\,P$ liegt oder gar A_0P_0 und $A\,P$ derselben Geraden angehören, so können wir ja zunächst noch die Projektion der Strecke $A\,P$ von einem beliebigen Punkte $\bar{M}$ in die Strecke $\bar{A}\bar{P}$ einer beliebigen Geraden $\bar{g}$ einschalten, um dann die Strecke $\bar{A}\bar{P}$ durch zwei Projektionen von M_1 und M_2 aus, analog wie vorhin, in die Strecke A_0P_0 überzuführen (Fig. 40). (Die Frage, ob wir auch in diesen besonderen Fällen stets mit der Aufeinanderfolge von nur *zwei* Projektionen auskommen, wollen wir hier nicht weiter erörtern. Daß wir in ganz besonderen Fällen sogar mit nur *einer* Projektion auskommen, ist ja auch klar.) Jedenfalls ergibt sich der allgemeine Satz:

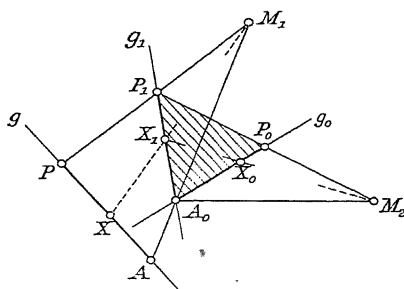
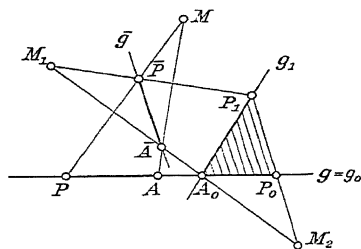



Fig. 39. Fig. 40.

11. Wir können stets zwei beliebige Strecken $A\,P$ und A_0P_0 durch eine Projektion oder durch eine Kette von zwei oder drei Projektionen ineinander überführen.

Es gilt, wie leicht zu übersehen, analog auch der Satz:

12. Wir können stets das Innere eines beliebigen Dreiecks $A\,B\,C$ durch eine Zentralkollineation oder durch eine Kette von Zentralkollineationen in das Innere eines gegebenen Dreiecks $A_0B_0C_0$ überführen.

§ 6. Das vollständige Viereck, Definition harmonischer Punkte.

Es seien in der Ebene 𝔈 irgend vier Punkte A, B, C, D gegeben. Sie mögen im übrigen innere oder äußere Punkte sein, wenn wir sie in den Figuren auch der Einfachheit halber als innere (d. h. unserer Anschauung unmittelbar zugängliche) Punkte wählen. Wir gehen weiter von der *Definition* aus:

1. Unter einem vollständigen Viereck versteht man die Figur der vier Punkte A, B, C, D mit ihren sechs Verbindungslinien (Fig. 41).

Letztere lassen sich zu drei Paar *Gegenseiten* zusammenfassen, wobei ein Paar Gegenseiten, z. B. die Geraden $A\,B$ und $C\,D$, alle vier Punkte enthalten

soll. Die Schnittpunkte der Gegenseitenpaare ergeben die *drei Diagonalpunkte* P, Q, R und ihre drei Verbindungslinien PQ, QR und RP *die drei Diagonalen* des vollständigen Vierecks.

Wir lenken nun unser Augenmerk auf zwei Diagonalpunkte, etwa P, Q, und auf die Schnittpunkte U, V der Diagonale PQ mit dem dritten (sich in R schneidenden) Paar Gegenseiten und behaupten:

Fig. 41.

2. Jedes beliebige andere vollständige Viereck mit denselben Punkten P, Q, U liefert stets auch denselben Punkt V.

Um dies zu beweisen, seien nun durch P zwei beliebige Geraden und durch U eine beliebige Gerade als Gegenseite bzw. Diagonale eines neuen vollständigen Vierecks gelegt (Fig. 42). Die Schnittpunkte der Geraden durch P mit der Geraden durch U seien A' und C'. Von diesen Punkten A', C' ziehen wir die Verbindungslinien nach Q, welche die Geraden durch P in den Punkten B', D' schneiden. Dann soll also auch die Gerade $B'D'$ durch denselben Punkt V gehen. (Das neue vollständige Viereck kann ersichtlich höchstens einen Eckpunkt mit einem entsprechenden des alten gemein haben, wenn nicht beide Vierecke identisch sein sollen.)

Fig. 42.

Wir denken nun eine Zentralkollineation bestimmt durch die Kollineationsachse $s = PQ$ und die entsprechenden Paare nicht zusammenfallender Punkte A, A' und B, B'. Der Schnittpunkt von AA' und BB' ist also das Zentrum der Kollineation (vgl. den Satz 7 S. 48). Dann sind auch C, C' entsprechende Punkte der Zentralkollineation, da die Geraden CA und $C'A'$ entsprechende Geradenpaare sind. (Die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind „perspektive" Dreiecke gemäß dem Satze von Desargues.) Ferner sind auch D, D' entsprechende Punkte, da DC und $D'C'$ sowie DA und $D'A'$ entsprechende Geraden sind. Also sind auch DB und $D'B'$ entsprechende Geraden, die dann durch denselben Punkt V der Achse $s = PQ$ gehen müssen (nach dem Satze 4 S. 47).

Die hiermit nachgewiesene Unabhängigkeit der Lage von V gegenüber jedem vollständigen Viereck, das zu den Punkten P, Q, U in der angegebenen Weise gehört, berechtigt uns nun zu folgender wichtigen *Definition:*

3. Vier Punkte P, Q, U, V einer Geraden nennen wir harmonische Punkte, wenn sie in der angegebenen Weise durch ein vollständiges Viereck miteinander verknüpft sind.

Es sollen also die Punkte P, Q Diagonalpunkte, die beiden anderen U, V Schnittpunkte der Diagonale PQ mit dem dritten Paar Gegenseiten sein. Es ist leicht auch der Satz zu beweisen:

4. Werden vier harmonische Punkte P, Q, U, V einer Geraden g durch vier Strahlen von einem Zentrum O aus auf eine andere Gerade g' in die Punkte P', Q', U', V' projiziert, so sind auch diese vier Punkte harmonisch (Fig. 43).

Denn man kann ja leicht eine Zentralkollineation hinzunehmen, welche den Punkt O als Kollineationszentrum, P, P' sowie Q, Q' als entsprechende Punkte und eine beliebige Gerade s durch den Schnittpunkt von g, g' als Achse besitzt. Durch die so bestimmte Zentralkollineation geht dann eine Viereckskonstruktion, welche die Punkte P, Q, U, V verknüpft, wieder in eine Viereckskonstruktion über, welche die Punkte P', Q', U', V' analog verknüpft.

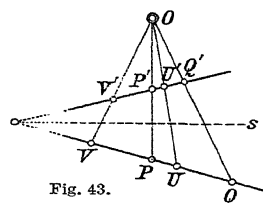



Fig. 43.

Der letzte Satz berechtigt uns zu folgender neuen *Definition:*

5. Vier Strahlen p, q, u, v durch denselben Punkt O (Fig. 43) *sollen harmonisch heißen, wenn sie von einer beliebigen Geraden in vier harmonischen Punkten geschnitten werden.*

Wir heben hervor, daß hier die Definition harmonischer Punkte und Strahlen *rein projektiv,* also nicht etwa durch Streckenverhältnisse gegeben ist. Eine solche Definition hat zuerst Chr. v. Staudt in seiner „Geometrie der Lage“, Nürnberg 1847, S. 43 eingeführt und damit den von jedem Messen, jeder „metrischen Geometrie“, unabhängigen Aufbau der projektiven Geometrie begründet.

Es gilt auch der Satz:

6. Das Punktepaar P, Q wird stets durch das Punktepaar U, V getrennt (vgl. S. 20).[1])

Wir sagen daher später wohl auch: *Das Punktepaar P, Q wird durch das Punktepaar U, V harmonisch getrennt.* Um dies nachzuweisen, beachten wir, daß es sich hier um eine Eigenschaft bloßer Lagebeziehungen handelt, um eine graphische (oder deskriptive) Eigenschaft, die sich eben bei Projektion der Geraden PQ auf eine andere Gerade nicht ändert (vgl. S. 21). (Allgemein soll eine in einem Satze ausgesprochene Eigenschaft als eine „*graphische*“ bezeichnet sein, wenn zu ihrem Beweis nur die Axiome I, II benutzt werden (also ins-

1) Vgl. F. Enriques, Enzyklopädie, a. a. O. S. 77.

besondere auch noch kein Stetigkeitsaxiom). Auch der Desarguessche Satz ist hiernach eine graphische Eigenschaft der bezüglichen Figur). Wir können demgemäß voraussetzen, daß *die Punkte P, Q, U, V innere Punkte sind und auch der Punkt U zwischen P, Q gelegen ist.* Denn ist ersteres nicht von vornherein der Fall, so können wir zunächst durch eine geeignete Zentralkollineation nach dem Satze 8 S. 49 die ganze Figur in eine neue überführen, in der alle wesentlichen Punkte innere Punkte sind. Ist dann in dieser neuen Figur, deren Punkte jetzt mit denselben Buchstaben bezeichnet seien, wie die Punkte der ursprünglichen Figur, der Punkt U nicht zwischen P, Q gelegen, sondern *etwa P zwischen U, Q*, so können wir diese Figur nochmals durch einfache Projektion so

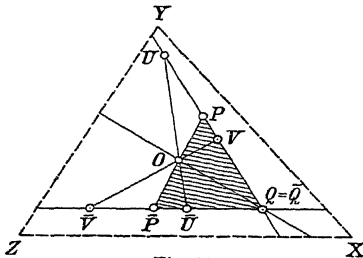
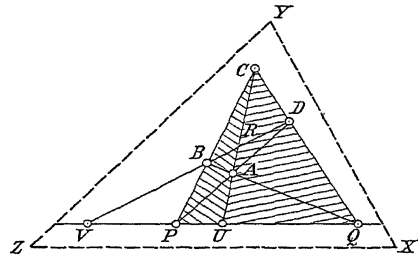



Fig. 44. Fig. 45.

umformen, daß wieder die aus P, Q, U, V entstandenen Punkte $\overline{P}, \overline{Q}, \overline{U}, \overline{V}$ innere sind, aber $\overline{U}$ zwischen $\overline{P}, \overline{Q}$ liegt, wobei noch $\overline{Q} = Q$ sei. Wir ziehen zu dem Zweck (Fig. 44) von einem außerhalb der Geraden PQ gewählten inneren Projektionszentrum O aus die Projektionsstrahlen nach den Punkten P, Q, U, V und wählen einen inneren Punkt $\overline{P}$ auf OP so, daß O zwischen den einander entsprechenden Punkten $P, \overline{P}$ liegt und die Verbindungslinie $\overline{P}Q$ oder $\overline{P}\overline{Q}$ den Projektionsstrahl OV in einem inneren Punkt $\overline{V}$ schneide. Da nun bezüglich des Dreiecks $PQ\overline{P}$ die Gerade OU die Seiten PQ und $P\overline{P}$ bzw. „nicht zwischen" P, Q und zwischen $P, \overline{P}$ schneidet, so muß sie die Seite $\overline{P}Q$ in einem Punkt $\overline{U}$ zwischen $\overline{P}, Q$ schneiden (nach dem Axiom II, 4 S. 10), d. h. von den neuen Punkten $\overline{P}, \overline{Q} = Q, \overline{U}, \overline{V}$, die dann an die Stelle von P, Q, U, V zu treten haben, liegt $\overline{U}$ zwischen $\overline{P}, \overline{Q}$. Die Punkte $\overline{P}, \overline{Q}, \overline{U}, \overline{V}$ seien dann fernerhin wieder einfach mit P, Q, U, V bezeichnet, so daß nun die oben angegebene Voraussetzung erfüllt ist.

Es sei nun folgendermaßen ein vollständiges Viereck zu diesen Punkten P, Q, U, V hinzubestimmt (Fig. 45): Wie verbinden einen beliebigen inneren Punkt C mit P, Q und U. Auf der Geraden CU sei ein (innerer) Punkt A zwischen C, U gewählt und mit P verbunden. Nach dem auf das Dreieck PUC angewandten Axiom II, 4 schneidet dann die Gerade QA die Seite PC in einem Punkte B zwischen P, C, und analog schneidet bezüglich des Dreiecks

QUC die Gerade PA die Seite CQ in einem Punkt D zwischen Q, C. Da nun bezüglich des Dreiecks PQC die Gerade BD die Seite PC zwischen P, C und die Seite QC zwischen Q, C schneidet, so kann V nicht zwischen P, Q liegen, was zu beweisen war.

Wir haben noch einige wenige Erweiterungen unserer bisherigen Betrachtungen des vollständigen Vierecks anzuschließen. Da die Punkte C, A, R, U der Fig. 41 S. 52 durch Projektion vom Zentrum B aus den Punkten P, Q, U, V entstehen, so gilt auch der Satz:

7. Je zwei Ecken A, C des vollständigen Vierecks sind harmonisch getrennt durch

Fig. 46. Fig. 47.

den Diagonalpunkt R ihrer Verbindungslinie und den Schnittpunkt U der gegenüberliegenden Diagonale PQ.

Ferner besteht der Satz:

8. Die beiden Punktepaare P, Q und U, V von vier harmonischen Punkten sind einander gleichwertig, d. h. es werden auch die Punkte U, V durch die Punkte P, Q harmonisch getrennt, derart also, daß sich auch ein vollständiges Viereck angeben läßt, bei dem U, V Diagonalpunkte und P, Q die Schnittpunkte der Diagonale UV mit dem betreffenden dritten Paar Gegenseiten sind. Um dies zu zeigen, erweitern wir die Fig. 41 S. 52 wie folgt (Fig. 46): Wir ziehen UD mit dem Schnittpunkt E auf AQ und PE mit dem Schnittpunkt F auf DQ. So erhalten wir das vollständige Viereck $AEFD$ mit den zugehörigen Punkten P, Q, U. *Also muß auch AF durch V gehen.* Der Schnittpunkt von AF und DE sei mit S bezeichnet. Denkt man nun eine Zentralkollineation bestimmt durch die Kollineationsachse PQ und mit den Originalpunkten B, C und den entsprechenden Bildpunkten A, D, so ist also Q das Kollineationszentrum. Durch diese Zentralkollineation gehen nun auch die Originalpunkte A, D in die Bildpunkte E, F über, da CA und DE sowie DB und FA sich auf der Kollineationsachse schneiden. Es geht also das Viereck $ABCD$ in das Viereck $EADF$ über und der Diagonalpunkt R in den Diagonalpunkt S, d. h. die Verbindungslinie RS geht durch das Kollineationszentrum Q. Betrachtet

man nun das vollständige Viereck $ARDS$, so sind also für dieses Viereck U, V Diagonalpunkte und P, Q die Schnittpunkte der Diagonale UV mit dem dritten Paare Gegenseiten.

Es sei schließlich noch erwähnt, daß neben dem Begriff des vollständigen Vierecks in „*dualer*“ Weise der Begriff des vollständigen Vierseits tritt. Letzteres besteht dann aus vier Geraden a, b, c, d und ihren sechs Schnittpunkten, die sich in drei Paar Gegenecken zusammenfassen lassen (Fig. 47). Die Verbindungslinie jedes Paares von Gegenecken sind die drei Diagonalen, welche sich ihrerseits in drei Diagonalpunkten schneiden. Wir können zeigen:

9. Je zwei Diagonalen, z. B. p, q, eines vollständigen Vierseits werden harmonisch getrennt von den durch ihren Schnittpunkt nach dem dritten Paar Gegenecken gehenden Verbindungslinien u, v. Da wir von dem Begriff des vollständigen Vierseits jedoch keinerlei Anwendung machen werden, gehen wir auf diese Verhältnisse auch nicht näher ein. Wir bemerken nur, daß insofern das vollständige Vierseit die „duale“ Figur zum vollständigen Viereck ist, als Punkte und Geraden der einen Figur oder eines Satzes für diese bzw. analogen Geraden und Punkten der anderen oder eines Satzes für diese entsprechen. Auf das hier uns zum ersten Male beispielsweise bewußt entgegentretende „*Prinzip der Dualität*“ der projektiven Geometrie gehen wir später ausführlich ein.

Zurückblickend am Ende dieses ersten Abschnittes, müssen wir doch darüber erstaunen, was alles sich bisher bereits aus den einfachen Axiomen der Verknüpfung und Anordnung durch *rein logische* Schlüsse hat gewinnen lassen. Und auch weiterhin noch werden wir zunächst nur diese genannten Axiome zugrunde legen, bis zum § 9.

Zweiter Teil.

Aufbau der projektiven Geometrie.

Dritter Abschnitt.

Rein projektive Einführung eines ebenen Koordinatensystems.

§ 7. Konstruktion des Koordinatensystems für ganzzahlige Koordinaten x, y; Möbiussches Netz.

Auf unseren bisherigen elementaren Betrachtungen wollen wir nun den weiteren Aufbau der projektiven Geometrie ausführen, soweit diese für die Entwicklung der nichteuklidischen Anschauungen wünschenswert ist, und zwar nunmehr *in analytischer Methode unter Zugrundelegung eines geeigneten projektiven Koordinatensystems*. Es liegt in der Natur der Sache begründet, daß wir die analytische Methode erst dann anwenden können, wenn vorher die Elementargeometrie schon eine Reihe von Lehrsätzen uns geliefert hat, wie es in den vorhergehenden Paragraphen geschehen ist. Die analytische Methode wird jedenfalls, auch nachher bei der Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie, die bequemste und vorteilhafteste sein. Bei ihr wird auch am besten der Vergleich der parabolischen, elliptischen und hyperbolischen Geometriearten zu überblicken sein.

Wir wenden uns sogleich zur *Aufstellung des geeigneten projektiven Koordinatensystems* in der Ebene hin, die jedoch eine längere Entwicklung erfordert. Um die Verhältnisse auch anschaulich leichter zu überblicken, wollen wir zuerst eine entsprechend durchgeführte Aufstellung des gewöhnlichen *kartesischen* Koordinatensystems betrachten, bei der wir von den Anschauungen der euklidischen Schulgeometrie Gebrauch machen, insbesondere auch, ohne es besonders im folgenden hervorzuheben, die Kongruenzsätze benutzen. Es sei aber ausdrücklich hier betont, daß diese Entwicklung des kartesischen Koordinatensystems nur zur bequemeren *Übersicht* der Konstruktion unseres projektiven Koordinatensystems dienen soll, in keiner Weise aber zum Beweise unserer projektiven Betrachtungen benutzt wird, wie dies sich auch in der Folge zeigen wird.

Wir gehen aus von den *rechtwinkligen x, y-Koordinatenachsen mit dem Anfangspunkt A* und den auf den Achsen abgetragenen Einheitsstrecken AB

und AA' (Fig. 48). Die unendlich fernen Punkte der Achsen seien mit P^∞, Q^∞ bezeichnet. Verbinden wir nun B mit Q^∞ und A' mit P^∞ (d. h. ziehen wir durch B und A' bzw. die Parallele zur y- oder x-Achse), so gewinnen wir als Schnittpunkt den „Einheitspunkt“ B'. Wir ziehen nun nacheinander die Verbindungslinie AB' mit dem unendlich fernen Punkt U^∞ (d. h. dem Schnittpunkt von AB' und der unendlich fernen Geraden $P^\infty Q^\infty$), dann BU^∞ mit dem Schnittpunkt C' auf $A'P^\infty$, dann $C'Q^\infty$ mit dem Schnittpunkt C auf der x-Achse, ferner CU^∞ mit dem Schnittpunkt D' auf $A'P^\infty$, dann $D'Q^\infty$ mit dem Schnittpunkt D auf der x-Achse und so weiter fort. Wir gewinnen auf diese Weise die Punkte $A, B, C, D, \ldots$ der x-Achse mit den Abszissen $0, 1, 2, 3, \ldots$ Ehe wir die kartesische Figur nun fortsetzen, wollen wir die analoge *projektive* Konstruktion ausführen, bis wir in entsprechender Weise das gleiche hier erreicht haben. Wir gehen aus von einem Dreieck APQ, dem „*Fundamentaldreieck*“, dessen Seiten AP und AQ wir als x, y-Achsen bezeichnen wollen, und einem beliebigen im Innern des Dreiecks gelegenen „*Einheitspunkte*“ B' (Fig. 49). Ob die Punkte A, P, Q, B', die allein die gegebenen Punkte unserer Konstruktion vorstellen, innere oder äußere (eigentliche oder uneigentliche) Punkte sind, kann uns nach unseren früheren Betrachtungen gleichgültig sein. Doch wollen wir der Einfachheit halber in der Figur annehmen, daß die Punkte A, P, Q, B' innere Punkte sind, und auch B' *innerhalb* des im begrenzten Gebiete gelegenen Dreiecks APQ gelegen ist, damit wir die entstehende Figur besser vor Augen liegen sehen. (Wenn das Dreieck APQ mit dem in seinem Innern gelegenen Einheitspunkt B' nicht vollständig innerhalb des begrenzten Gebietes liegt, so können wir jedenfalls ja auch nach dem Satze 8 S. 49 analog der Fig. 38 ein Abbild des Dreiecks im begrenzten Gebiet uns schaffen und durch die an diesem Abbild analog ausgeführten Konstruktionen uns in jedem Falle alle Verhältnisse in einfachster Weise veranschaulichen.) Ausdrücklich möchte ich von vornherein darauf hinweisen, daß alle Konstruktionen, die wir nun an der Figur ausführen werden, nur das „Prinzip des Projizierens und Schneidens“ benutzen, d. h. wir werden immerfort nur zwei Punkte durch eine Gerade verbinden und zwei Geraden miteinander zum Schnitt bringen, also rein projektiv vorgehen. Wir ziehen nun zunächst die Linien $B'Q$ und $B'P$ mit dem Schnittpunkte B bzw. A' auf den

Fig. 48.

x, y-Achsen, sodann weiter der Reihe nach die Verbindungslinien AB' mit dem Schnittpunkt U auf PQ, dann BU mit dem Schnittpunkt C' auf $A'P$, dann $C'Q$ mit dem Schnittpunkt C auf der x-Achse, ferner CU mit dem Schnittpunkt D' auf $A'P$, dann $D'Q$ mit dem Schnittpunkt D auf der x-Achse und so weiter fort. Wir erhalten auf diese Weise die Punkte $A, B, C, D, \ldots$ der x-Achse, denen wir die Abszissen $0, 1, 2, 3, \ldots$ zuordnen.

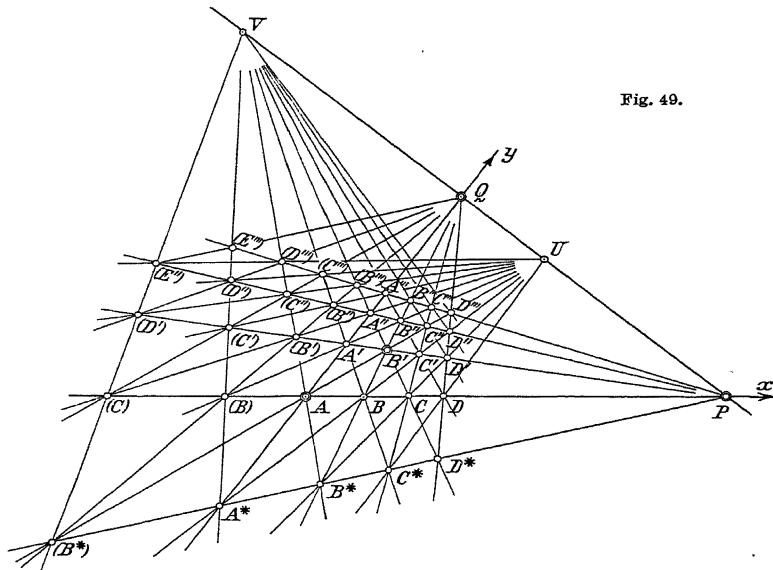



Fig. 49.

Nun vervollständigen wir leicht die *kartesische* Fig. 48 wie folgt (es ist unbedingt wünschenswert, sich die Fig. 48 und 49 selbst noch einmal ihrem langsamen Entstehen gemäß zu zeichnen, da die Figuren in statu nascendi natürlich die Verhältnisse besser übersehen lassen): Wir ziehen nacheinander die Verbindungslinien $A'U^\infty$ mit dem Schnitt (B) auf der x-Achse, ferner $(B)Q^\infty$ mit dem Schnitt (B') auf $A'P^\infty$, dann $(B')U^\infty$ mit dem Schnitt (C) auf der x-Achse und so weiter fort. Wir erhalten so die Punkte (B), (C), (D), ... der x-Achse mit den Abszissen $-1, -2, -3, \ldots$. Analog ziehen wir die entsprechenden Verbindungslinien in der *projektiven* Fig. 49, so daß wir hier ebenfalls die Punkte (B), (C), (D),... der x-Achse erhalten, denen wir die Abszissen $-1, -2, -3, \ldots$ zuordnen. Somit haben wir auf der x-Achse alle Punkte mit ganzzahliger Abszisse oder, besser gesagt, zu jedem ganzzahligen Abszissenwert einen Punkt erhalten. *Dem Punkte P selbst wollen wir noch durch weitere Festsetzung die Abszisse ∞ zuordnen* (vgl. S. 77).

Die *kartesische* Figur enthält nun als Schnittpunkt der schon gezogenen Ordinatenlinien durch Q^∞ und der schon gezogenen Geraden durch U^∞ die Punkte $\ldots (C'), (B'), A', B', C', D', \ldots$ ferner $\ldots (C''), (B''), A'', B'', C'', D'', \ldots$ und so weiter fort, welche bzw. auf den Abszissenlinien $y = 1$, $y = 2$, $y = 3, \ldots$ liegen, ebenso solche Reihen von Punkten, wie z. B. $\ldots (C^*), (B^*), A^*, B^*, C^*, \ldots$, auf den Geraden $y = -1$, $y = -2$ usw. Die kartesische Figur besteht jetzt eben aus der quadratischen Einteilung der ganzen Ebene mit den durch U^∞ gehenden Diagonalen. Die andere Schar der Diagonalen geht ersichtlich durch denselben Punkt V^∞. Die Eckpunkte der Quadrate sind alle diejenigen Punkte, welche ganzzahlige (x, y)-Koordinaten besitzen.

Analog erhalten wir in der *projektiven* Figur als Schnittpunkte der schon gezeichneten, in Q bzw. U zusammenlaufenden beiden Geradenscharen die ebenso bezeichneten Punktreihen. Wir fassen jetzt z. B. zunächst die Punktreihe $\ldots (C''), (B''), A'', B'', C'', \ldots$ ins Auge und behaupten, daß auch diese Punkte sämtlich auf derselben Geraden durch den Punkt P liegen. Zum Beweise denken wir uns die *Zentralkollineation mit PQ als Kollineationsachse, Q als Zentrum und A, A' als entsprechende Punkte.*

Durch diese Zentralkollineation geht die ganze Figur in sich über, nur die einzelnen Punkte verschieben sich untereinander. Es geht ja die Originalgerade AP in die Bildgerade $A'P$ über, also die Originalpunkte $\ldots (B), A, B, C, \ldots$ bzw. in die Bildpunkte $\ldots (B'), A', B', C', \ldots$. Ferner geht die Originalgerade AU in die Bildgerade $A'U$ über, also der jetzt als Originalpunkt angesehene Punkt B' in den Bildpunkt B'', ferner die Gerade BU in $B'U$, also C' in C'' und so fort. Folglich geht die Gerade $\ldots A'B'C' \ldots$ in die Gerade $\ldots A''B''C'' \ldots$ über, d. h. also die Punkte $\ldots A'', B'', C'', \ldots$ liegen auf einer Geraden durch P. Ganz analog läßt sich zeigen, daß auch die Punkte der Reihe $\ldots A''', B''', C''', \ldots$ auf einer Geraden durch P liegen (denn die jetzt als Originalpunkte aufgefaßten Punkte $\ldots A'', B'', C'', \ldots$ gehen durch die genannte Zentralkollineation in die Bildpunkte $\ldots A''', B''', C''', \ldots$ über). *Überhaupt finden wir alle Reihen von Punkten der kartesischen Figur auf der Geraden $y = n'$, wo n' eine positive oder negative ganze Zahl ist, auch bei der projektiven Figur entsprechend auf Geraden durch P gelegen wieder.*

Die projektive Figur zeigt jedoch an Stelle der Quadrate der kartesischen Figur sich aneinanderreihende Vierecke. Deren gemeinsame *eine* Diagonalschar geht durch denselben Punkt U. *Aber auch die gemeinsame andere Diagonalschar geht durch denselben Punkt V der Geraden PQ.* Denn ist der Punkt V als Schnitt von BA' mit PQ gewonnen und betrachtet man das vollständige Viereck mit den Ecken $ABA'B'$, so ist ersichtlich V der vierte harmonische Punkt zu P, Q, U. Also muß auch im Hinblick auf das vollständige Viereck $A'(B')A''(B'')$ die Gerade $A'(B'')$ durch V gehen, d. h. die Punkte B, A' und (B'')

liegen auf derselben Geraden durch V. Diese Gerade geht dann analog auch durch (C''') . . ., wie C^* . . . . Und wegen der oben eingeführten Zentralkollineation liegen dann auch die Punkte . . . D^*, C, B', A'' . . . auf derselben Geraden durch V und so weiter fort, d. h. also: *Auf denselben Geraden durch V liegen alle solche Punkte, die auch in der kartesischen Figur auf denselben Geraden* durch V^∞ liegen. Nun ordnen wir natürlich den Punkten . . . A^*, A, A', A'' . . . der y-Achse die Ordinatenzahlen . . . $-1, 0, 1, 2, \ldots$, insbesondere durch weitere Festsetzung dem Punkt Q die Ordinatenzahl ∞ zu und jedem Eckpunkte der Vierecke die beiden Koordinatenzahlen, welche den Schnittpunkten seiner Verbindungslinien mit P, Q und den x, y-Achsen entsprechen. Es haben also z. B. die Punkte . . . (B^*), A^*, B^*, C^*, . . . die Koordinatenpaare . . . $(-1, -1)$, $(0, -1)$, $(1, -1)$, $(2, -1)$, . . . und die Punkte . . . B^*, B, B', B'', . . . die Koordinatenpaare . . . $(1, -1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, ... *Jedem Eckpunkte der Vierecke ist demgemäß also ein Paar positiver oder negativer ganzzahliger Koordinaten* $(\pm n, \pm n')$ *und umgekehrt jedem ganzzahligen Koordinatenpaare ein bestimmter solcher Eckpunkt zugeordnet.*[1]) Die vier verschiedenen Vorzeichenkombinationen der Koordinaten $\pm n$, $\pm n'$ entsprechen natürlich den vier Dreiecksgebieten, in welche die ganze Ebene durch die drei Seitengeraden des Fundamentaldreiecks zerlegt wird (Fig. 50). Auch erkennen wir leicht, daß durch die Zentralkollineation, welche durch AP als Achse, Q als Zentrum und B^*, B' als entsprechende Punkte bestimmt ist, das Dreiecksgebiet $(+, -)$ mit allen (bereits jetzt und noch später in ihm ausgeführten) Konstruktionen der Fig. 49 in das Dreiecksgebiet $(+, +)$ mit den hier ausgeführten Konstruktionen übergeht. Analoges gilt für das Dreiecksgebiet $(-, +)$ bzw. $(-, -)$. *Das Dreiecksgebiet* $(+, +)$ *bietet damit die Möglichkeit, auch die anderen Dreiecksgebiete anschaulich zu erfassen.*

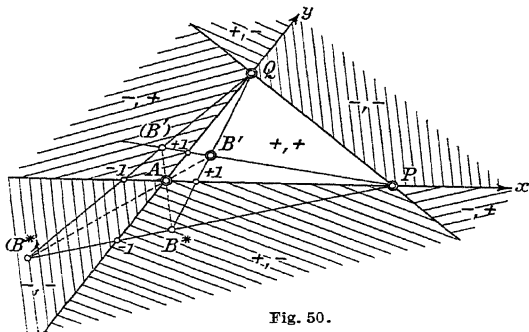



Fig. 50.

Die projektive Figur mitsamt den sogleich noch ausgeführten Erweiterungen nennt man die *Möbiussche Netzkonstruktion*, weil zuerst *A. F. Möbius* in seinem Buche: *Der barycentrische Calcul*, Leipzig 1827, Ges. Werke Bd. I, 1885,

1) Würden wir für einen Augenblick die Gültigkeit der euklidischen Geometrie annehmen, so würde ersichtlich durch eine Zentralkollineation aus der kartesischen Figur eine projektive Figur entstehen, wie wir nicht weiter ausführen wollen.

S. 237ff., derartige Konstruktionen ausgeführt hat.[1]) Wenn wir die Figur jetzt noch einmal überblicken, so bemerken wir leicht, daß ja immerfort *vollständige Vierecke* mit den Diagonalpunkten P, Q und den auf ihrer Verbindungslinie liegenden Schnittpunkten U, V der dritten Paare von Gegenseiten vorhanden sind. Nicht nur die vier Punkte B', C', B'', C'', sondern auch A, C, A'', C'' oder (B^*), C^*, (B''), C'' geben beispielsweise solche vorkommenden vollständigen Vierecke. Demgemäß kommen natürlich auch immerfort vier harmonische Punkte und vier harmonische Strahlen in der Figur vor. *Ja, im Grunde hatte es sich überhaupt bei dem Aufbau der Figur um die wiederholte Konstruktion des vierten harmonischen Punktes zu drei bereits bestimmten Punkten auf Grund der Sätze vom vollständigen Viereck gehandelt.* Denn der anfangs konstruierte Punkt C ist ja der vierte harmonische Punkt zu P, B, A, gemäß der *Festsetzung* für die Ausdrucksweise: *Als vierter harmonischer Punkt zu P, B, A soll der Punkt C gelten, so daß P, B und A, C die beiden Paare der vier harmonischen Punkte sind.* Auch sollen, wenn wir von vier harmonischen Punkten P, B, A, C sprechen, stets P, B und A, C die beiden Paare sein. Denn in dem vollständigen Viereck der vier Punkte U, Q, B', C' sind die Punkte P, B Diagonalpunkte und A, C die Schnittpunkte des dritten Paares von Gegenseiten mit PB (vgl. den verkleinerten Teil der Fig. 49 in Fig. 51). In solcher Weise sind die Punkte der x-Achse mit den Abszissen $2, 3, 4, \ldots$ als vierte harmonische Punkte bzw. zu den Punkten $\infty, 1, 0$; $\infty, 2, 1$; $\infty, 3, 2$ usw. konstruiert zu denken.

Fig. 51.

§ 8. Erweiterung des Koordinatensystems auf dyadisch-rationale Koordinatenzahlen x, y.

Um nun unser Koordinatensystem zu erweitern, achten wir zunächst auf die Diagonalschnittpunkte der *kartesischen* Figur. In ihr liegen die Diagonalschnittpunkte $\ldots A_0, B_0, C_0 \ldots, \ldots A_0', B_0', C_0' \ldots$ usw. auf je einer Geraden durch P^∞, die Diagonalschnittpunkte $\ldots A_0, A_0' \ldots, \ldots B_0, B_0' \ldots$ usw. auf je einer Geraden durch Q^∞ (Fig. 48 S. 58).

Analoges gilt nun auch für die *projektive* Fig. 49 S. 59. Daß hier z. B. die Diagonalschnittpunkte $\ldots A_0, A_0', A_0'' \ldots$ auf derselben Geraden durch Q liegen, folgt einfach wieder aus der Anwendung der Zentralkollineation mit PQ als Achse, Q als Zentrum und A, A' als entsprechende Punkte (Fig. 52).

1) Vgl. auch F. Enriques, Enzyklopädie, a. a. O. S. 75 und 81, sowie Chr. v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, 2. Heft, Nürnberg 1856, § 29.

Durch diese Zentralkollineation geht A_0 in A_0', A_0' in A_0'' usw. über, d. h. $\ldots A_0, A_0', A_0'' \ldots$ liegen auf einer Geraden durch Q.[1])

Entsprechend folgt durch Anwendung der Zentralkollineation mit PQ als Achse, P als Zentrum und A, B als entsprechende Punkte, daß z. B. die Punkte $\ldots A_0, B_0, C_0 \ldots$ auf derselben Geraden durch P liegen.

Analog wie in der *kartesischen* Figur sollen nun auch in der *projektiven* Figur (Fig. 52) den Schnittpunkten der neuen Verbindungslinien $\ldots A_0A_0' \ldots$, $\ldots B_0B_0' \ldots$ bzw. $\ldots A_0, B_0 \ldots$, $\ldots A_0', B_0' \ldots$ usw. mit der x- bzw. y-Achse die Abszissen bzw. die Ordinaten $\ldots \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, \ldots$ zugeordnet sein, überhaupt den neu entstandenen Schnittpunkten in der Ebene die Koordinaten

$$x = \pm\ n + \frac{\alpha}{2}$$

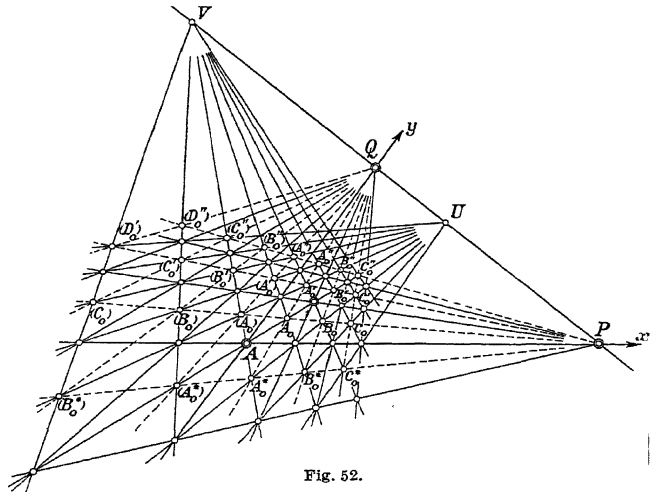
$$y = \pm\left(n' + \frac{\alpha'}{2}\right),$$

wo n, n' beliebige positive ganze Zahlen und die Zahlen α, α', unabhängig voneinander, gleich 0 oder 1 sind, ohne daß sie beide gleich 0 sind. Jedes frühere gewöhnliche Viereck, z. B. das Viereck $ABB'A'$, ist jetzt *in vier kleinere Vierecke* zerlegt. Auch letztere haben, was analog wie früher zu beweisen ist, gemeinsame Diagonalen, die sich im Punkte U bzw. V schneiden.

Mit diesen kleineren Vierecken werden wir jetzt ebenso verfahren, wie soeben mit den größeren. Wir haben dann insgesamt die Punkte der Ebene mit den ihnen zugeordneten Koordinaten

$$x = \pm\left[n + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{4}\right],$$

$$y = \pm\left[n' + \frac{\alpha'}{2} + \frac{\beta'}{4}\right]$$

1) Daß z. B. die Punkte A_0, A_0' mit Q in einer Geraden liegen, folgt auch deswegen, weil A, B', U, A_0 und A', B'', U, A_0' je vier harmonische Punkte sind und die Geraden AA', $B'B''$ durch Q gehen.

erhalten, wo die Zahlen $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ gleich 0 oder 1 sind. Und bei analoger weiterer Fortsetzung des Verfahrens ergibt sich die Gesamtheit der Punkte mit den Koordinaten, die durch folgende aus einer endlichen Gliederzahl bestehenden Reihen dargestellt sind:

$$x = \pm \left[n + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{4} + \frac{\gamma}{8} + \frac{\delta}{16} + \cdots \right],$$

$$y = \pm \left[n' + \frac{\alpha'}{2} + \frac{\beta'}{4} + \frac{\gamma'}{8} + \frac{\delta'}{16} + \cdots \right],$$

wo die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots; \alpha', \beta', \gamma', \ldots$ gleich 0 oder 1 sind. Diese Koordinaten können wir auch in der Form schreiben:

$$x = \pm \left[n + \frac{p}{2^m} \right],$$

$$y = \pm \left[n' + \frac{p'}{2^{m'}} \right],$$

wo n, n', positive ganze Zahlen sind und p, p' positive ungerade ganze Zahlen, die den Ungleichungen

$$p < 2^m, \quad p' < 2^{m'}$$

genügen. Solche Zahlen, wie sie die Koordinaten von x, y in den letzten Gleichungen darstellen, nennt man *dyadisch-rationale Zahlen.*

Somit können wir, unsere bisherige Ausführung zusammenfassend, sagen: *1. Durch die Möbiussche Netzkonstruktion erhalten wir eine Gesamtheit von Punkten der Ebene, denen als positive oder negative Koordinaten die dyadisch-rationalen Zahlenpaare zugeordnet sind und zwar eineindeutig, so daß also jedem konstruierten Punkte ein bestimmtes solches Zahlenpaar und jedem solchen Zahlenpaare ein bestimmter Punkt zugeordnet ist.*

Es sei noch hinzugefügt, daß auch bei dieser Erweiterung unserer Konstruktion es sich stets um die *Bestimmung des vierten harmonischen Punktes* zu drei bereits bestimmten Punkten gehandelt hat. Es mag genügen, dementsprechend darauf hinzuweisen, daß ja auf der x-Achse die Punkte $\ldots \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \ldots$ die vierten harmonischen Punkte zu den Punkttripeln $\ldots 0, 1, \infty;\ 1, 2, \infty;\ 2, 3, \infty \ldots$ und die Punkte $\ldots \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4} \ldots$ die vierten harmonischen Punkte zu den Punkttripeln $\ldots 0, \frac{1}{2}, \infty;\ \frac{1}{2}, 1, \infty;\ 1, \frac{3}{2}, \infty \ldots$ sind. Und die Konstruktion des vierten harmonischen Punktes zu den drei bereits bestimmten ist auch jedesmal mit Hilfe eines vollständigen Vierecks ausgeführt. *Die Möbiussche Netzkonstruktion ist nur eine erweiterte Figur des vollständigen Vierecks.*

Zusatz: Wir sehen gleichsam statt des dekadischen Zahlensystems das *dyadische Zahlensystem* hier angewandt, das sich auf den Potenzen der Zahl 2 aufbaut und demnach nur die Ziffern $\overline{0}, \overline{1}$ benutzt, wenn wir auch die ganzen Zahlen n, n' in der Form

$$a \cdot 2^0 + b \cdot 2^1 + c \cdot 2^2 + \cdots$$

darstellen würden, wo die Zahlen $a, b, c, \ldots$ wieder gleich 0 oder 1 sind, und statt $2^0, 2^1, 2^2$ usw. $\overline{1}, \overline{10}, \overline{100}, \ldots$ schreiben würden. In diesem dekadischen Zahlensystem würde z. B. die dekadische Zahl

$$\tfrac{1}{5} = 0 + \tfrac{0}{2} + \tfrac{0}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{0}{32} + \tfrac{0}{64} + \tfrac{1}{128} + \tfrac{1}{256} + \cdots \text{ in inf.}$$

(mit der Periode 0, 0, 1, 1 der Zähler) dyadisch durch den periodischen Bruch

$$0,0011\,0011\ldots,$$

also dyadisch irrational, dargestellt sein. Analog ist

$$\begin{aligned} 27\tfrac{1}{3} &= 110\,11, \overline{01}\,\overline{01}\,\overline{01}\ldots \\ &= 1\cdot 16 + 1\cdot 8 + 0\cdot 4 + 1\cdot 2 + 1\cdot 1 + \tfrac{0}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{0}{8} + \tfrac{1}{16} + \\ &= 1\cdot 10000 + 1\cdot 1000 + 0\cdot 100 + 1\cdot 10 + 1\cdot 1 + 0\cdot \overline{0,1} + 1\cdot \overline{0,01} \\ &\qquad + 0\cdot 0{,}001 + 1\cdot 0{,}0001 + \cdots \end{aligned}$$

§ 9. Einführung eines Stetigkeitsaxioms; Verteilung der dyadisch-rationalen Punkte auf der x-Achse.

Es soll sich jetzt um die Erweiterung unseres projektiven Koordinatensystems auf *beliebige* Koordinatenzahlen x, y handeln. Dieser Wunsch kommt auf den Satz hinaus:

1. Jedem beliebigen Punkte unserer x-Achse entspricht ein bestimmter (positiver oder negativer) Zahlenwert als Abszisse, und umgekehrt gehört zu jedem (positiven oder negativen, dyadisch-rationalen oder dyadisch-irrationalen) Zahlenwert x ein bestimmter Punkt der x-Achse mit dieser Abszisse.

Dieser Satz umfaßt also, kurz gesagt, *die eineindeutige Zuordnung der (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkte der x-Achse und der Gesamtheit der reellen Zahlen.* Mit den bisherigen Axiomen der Verknüpfung und Anordnung allein läßt sich dieser Satz nicht beweisen. Wir müssen vielmehr ein besonderes *Stetigkeitsaxiom* hinzunehmen, um diese Eigenart der Geraden tiefer zu erfassen, von dem wir daher vorweg auch sprechen wollen, ehe wir im nächsten Paragraphen den Beweis des Satzes **1** ausführen.

Das Anschauungsbild, das uns zu dem ursprünglichen Begriff der Geraden oder eines Teiles von ihr, der Strecke, führt, wird uns ja z. B. von der Kante eines Würfels, eines Lineals, einer Tischplatte oder von einem gespannten Faden, vielleicht auch von einem Lichtstrahl in einem homogenen Medium geliefert. Und wenn wir etwa mit der Hand ein solches Sinnbild der mathematischen Geraden abtasten oder mit dem Blick überfliegen, „mit dem Auge abtasten", so gewinnen wir auch ein *Gefühl des Lückenlosen,* eines „Kontinuums", in uns, das uns der anschauliche Anlaß zur Aufstellung des *logischen Begriffs der „stetigen" Punktanordnung* auf der Geraden, d. h. zur Aufstellung

eines Stetigkeitsaxioms als Grundlage für unser logisches Denken gibt. Dieser Begriff, der ja analog auch sein Gegenstück in der Analysis bei der Stetigkeit der Zahlenreihe findet, hat nun von den Zeiten Euklids an zu den schärfsten Untersuchungen in der Mathematik Veranlassung gegeben.

Wir wollen uns einmal bei der uns bekannten euklidischen oder kartesischen analytischen Geometrie in die aus ihr ausgeschiedene neue Geometrie hineindenken, in der *nur die Punkte mit rationalen Koordinaten x, y bei Zugrundelegung eines bestimmten Koordinatensystems mit seinem Einheitspunkt B' vorhanden sein sollen.* Gewiß können wir dann zwei beliebige solche „rationalen Punkte" durch eine Gerade verbunden denken; je zwei solche Geraden schneiden sich stets wieder in einem rationalen Punkte, d. h. *durch wiederholte Anwendung des Prinzips des Projizierens und Schneidens kommen wir nicht aus dem Gebiet der rationalen Punkte hinaus.* Ferner würde beispielsweise der Punkt B' mit den Koordinaten 1, 1 die Entfernung $AB' = \sqrt{2}$ vom Anfangspunkt A in der alten Geometrie besitzen. Es würde aber nicht möglich sein, die Strecke AB' auf der Abszissenachse vom Anfangspunkt aus abzutragen, da es auf ihr den Punkt $\sqrt{2}$ nicht gibt. Wir wollen auch einmal untersuchen, *ob denn der „Einheitskreis"*

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

mit einer beliebigen Geraden

$$x = \frac{p}{q}, \tag{2}$$

wo p, q positive, teilerfremde ganze Zahlen mit der Bedingung $p \leqq q$ sind $\Big($also mit der Verbindungslinie der beiden rationalen Punkte $\left(\frac{p}{q}, 0\right)$ und $\left(\frac{p}{q}, 1\right)\Big)$ *in der neuen Geometrie stets einen (rationalen) Schnittpunkt hat* (Fig. 53). Dies ist ersichtlich nicht der Fall; denn z. B. die Gerade $x = \frac{1}{2}$ wird ja als Schnittpunkt mit dem Kreis in der alten Geometrie die Punkte mit den Ordinaten $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$ besitzen, die es in der neuen Geometrie nicht gibt. Andererseits wird die Gerade $x = \frac{3}{5}$ die vorhandenen Schnittpunkte mit den Ordinaten $y = \pm\frac{4}{5}$ ergeben. Gewiß wird die neue Geometrie zu mancher interessanten Fragestellung Anlaß bieten. Wir können z. B. die Frage aufwerfen, wie denn die rationalen Punkte auf dem Einheitskreis verteilt sind. Hierzu wollen wir folgendes ausführen: Wir können uns bei der folgenden Betrachtung auf den Quadranten mit positiven (x, y)-Koordinaten beschränken. Für $x = \frac{p}{q}$ ($p \leqq q$, p und q teilerfremd zueinander) ergibt die Gleichung (1)

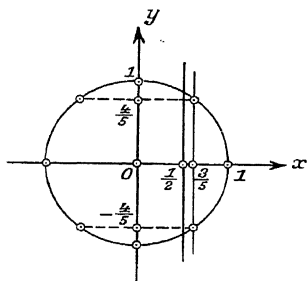



Fig. 53.

$$y = \frac{1}{q} \cdot \sqrt{q^2 - p^2}, \tag{3}$$

d. h. rationale Schnittpunkte, wenn $q^2 - p^2$ eine Quadratzahl ist, die wir mit t^2 bezeichnen, wobei auch t eine ganze Zahl ist. Es gilt also die Gleichung

$$p^2 + t^2 = q^2. \tag{4}$$

Diese diophantische Gleichung, die ja durch positive ganze Zahlen t, p, q befriedigt werden soll, heißt bekanntlich die *pythagoreische Gleichung.*[1])

Um die diophantische Gleichung (4) zu lösen, setzen wir

$$q = p + v, \quad t = u.$$

Dann ist nach der Gleichung (4)

$$p = \frac{u^2 - v^2}{2v}.$$

Ferner ist

$$q = p + v = \frac{u^2 + v^2}{2v}.$$

Nun soll ja $t = u$ eine positive ganze Zahl sein; ebenso muß $v = q - p$ für $q > p$ eine positive ganze Zahl sein.

Die drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{u^2 - v^2}{2v} \\ q &= \frac{u^2 + v^2}{2v} \\ t &= u \end{aligned}\right\} \tag{5a, b, c}$$

ergeben also insofern alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung (4), *wenn für u, v beliebige positive ganze Zahlen mit der Bedingung $u \geqq v$ so gewählt werden, daß für p, q sich ganze Zahlen ergeben.*

Wir können uns auf die Bestimmung der *zueinander teilerfremden Zahlen* p, q, t beschränken. Sind durch bestimmte Werte u, v nach den Gleichungen (5a, b, c) nun drei ganze Zahlen p, q, t bestimmt, so gehören zu der Gruppe der Zahlen, die von diesen sich nur um einen gemeinsamen Teiler unterscheiden,

---

1) Aus der Literatur seien genannt: I. F. Lorenz, Euklids Elemente, 6. Ausg., Halle 1840, S. 131. — Thomas L. Heath, The thirteen books of Euklid's Elements, Vol. III, 2. Edition, Cambridge 1926 (Book X, proposition 28, lemma 1), S. 63ff. — Frénicle, Traité des triangles rectangles en nombres, 1676—1677, wieder abgedruckt: Mémoires de l'Academie royale des sciences, tome V, Paris 1729, S. 85—166. — Lenthéric, Annales de Mathématiques pures et appliquées, rédigé par Gergonne, t. 20, Nismes 1829 et 1830, p. 379—382 (siehe auch Crelle's Journal, Bd. 5, Berlin 1829, S. 386). — H. Rath, Entwicklung aller pythagoreischen Primdreiecke, Grunerts Archiv der Mathematik und Physik, 55. Teil, Leipzig 1873, S. 193. — W. Lietzmann, Der pythagoreische Lehrsatz, 4. Aufl., Leipzig, 1930.

die Zahlen

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= u^2 - v^2 \\ q_1 &= u^2 + v^2 \\ t_1 &= 2uv. \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{a, b, c})$$

Wenn die Zahlen u, v einen gemeinsamen Teiler σ besitzen, so haben auch p_1, q_1, t_1 den gemeinsamen Teiler σ^2. Setzen wir dann $u = \sigma \cdot u_1$, $v = \sigma \cdot v_1$, so sind drei neue Zahlen derselben Gruppe bestimmt durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} p_2 &= u_1^2 - v_1^2 \\ q_2 &= u_1^2 + v_1^2 \\ t_2 &= 2u_1 v_1, \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{a, b, c})$$

wo u_1, v_1 zueinander teilerfremd sind. Sind u_1, v_1 beide ungerade, so haben p_2, q_2, t_2 den gemeinsamen Faktor 2. Hiernach ergibt sich das Resultat, wenn wir jetzt wieder die Bezeichnungen p_2, q_2, t_2 und u_1, v_1 durch p, q, t und u, v ersetzen:

Alle teilerfremden pythagoreischen Zahlen werden durch die beiden Tripel von Gleichungen gegeben

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{u^2 - v^2}{2} \\ q &= \frac{u^2 + v^2}{2} \\ t &= u \cdot v \end{aligned}\right\} \qquad (8\text{a, b, c})$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned} p &= u^2 - v^2 \\ q &= u^2 + v^2 \\ t &= 2u \cdot v, \end{aligned}\right\} \qquad (9\text{a, b, c})$$

wo u, v beliebige teilerfremde positive ganze Zahlen sind ($u \geqq v$) *und die Gleichungen* (8a, b, c) *gelten, wenn beide Zahlen u, v ungerade* (speziell $u = v = 1$), *die Gleichungen* (9a, b, c), *wenn nur eine von den Zahlen u, v ungerade* (speziell $u = 1$, $v = 0$) *ist.*

Setzen wir noch in den Gleichungen (8a, b, c)

$$u = u_1 + v_1$$

$$v = u_1 - v_1,$$

so ergibt sich

$$u_1 = \frac{u + v}{2}$$

$$v_1 = \frac{u - v}{2},$$

wo nun $u_1, v_1 (u_1 \geqq v_1)$ teilerfremde positive ganze Zahlen sind, von denen eine gerade, die andere ungerade ist, und die Gleichungen (8a, b, c) gehen über in

$$p = 2u_1v_1,$$
$$q = u_1^2 + v_1^2,$$
$$t = u_1^2 - v_1^2,$$

d. h. diese Gleichungen unterscheiden sich, abgesehen von der Bezeichnung, von den Gleichungen (9a, b, c) nur durch die Vertauschung der Zahlen p, t. Daher erhalten wir schließlich das uralte Resultat:

Alle teilerfremden pythagoreischen Zahlen werden durch die Gleichungen (9a, b, c) *gegeben, wenn u, v beliebige teilerfremde positive ganze Zahlen* ($u \geqq v$) *sind, von denen eine gerade, die andere ungerade ist, wozu noch die Vertauschung der Zahlen p, t treten kann.*

Es ergibt sich weiter auch der bekannte Satz:

Eine der beiden Zahlen p, t von drei beliebigen pythagoreischen Zahlen ist stets eine durch 4 teilbare Zahl (einschließlich des Falles $p = 0$, $t = q$).

Aus den Gleichungen (8a, b, c) und (9a, b, c) folgt für unsere Anwendung

$$x = \frac{p}{q} = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}. \tag{10}$$

Dem Vorstehenden gemäß ergibt sich also: *Nach der Gleichung* (10) *ergeben sich für beliebige positive ganze teilerfremde Zahlen u, v* ($u \geqq v$) *alle Geraden $x = \frac{p}{q}$, welche für das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ rationale Schnittpunkte mit dem Einheitskreis besitzen.* Alle anderen Geraden $x = \frac{p}{q}$ schneiden also den Einheitskreis nicht.

Was die *Verteilung der rationalen Punkte auf dem Einheitskreise* betrifft, so gilt trotz der letzten Bemerkung der folgende interessante Satz:

2. In beliebiger Nähe jedes rationalen oder nicht rationalen Kreispunktes liegen stets noch beliebig viele rationale Kreispunkte.

Denn: Es sei x_0 die gegebene Abszisse des rationalen oder nicht rationalen Kreispunktes ($0 < x_0 < 1$) und ε eine gegebene sehr kleine positive Zahl, so daß auch $x + \varepsilon < 1$ ist. Aus den Ansätzen

$$x_0 = \frac{\quad 1}{\tau_0 + 1},$$
$$x_0 + \varepsilon = \frac{\tau_1 - 1}{\tau_1 + 1}$$

folgt dann

$$\tau_0 = \frac{1 + x_0}{1 - x_0},$$
$$\tau_1 = \frac{1 + x_0 + \varepsilon}{1 - x_0 - \varepsilon}, \qquad \text{wobei } \tau_1 > \tau_0 > 1 \text{ ist.}$$

Nun gibt es aber stets *beliebig viele* rationale Zahlen $\frac{u}{v} = \sqrt{\tau} > 1$, für die $\sqrt{\tau_1} > \frac{u}{v} > \sqrt{\tau_0} > 0$ ist, und für alle diese Verhältnisse $\frac{u}{v}$ ergeben sich die Abszissen

$$x = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2} = \frac{\tau - 1}{\tau + 1},$$

für die $x_0 < x < (x_0 + \varepsilon)$ ist, da für die Gleichung

$$x = \frac{\tau - 1}{\tau + 1}$$

ja

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{2}{(\tau + 1)^2} > 0$$

gilt, und zu diesen Abszissen gehören rationale Ordinaten der entsprechenden Kreispunkte.

Wir können dem Satze 2 den folgenden zur Seite stellen:

3. Natürlich liegen auch bei der S. 66 benutzten Geraden $x = \frac{1}{2}$ in beliebiger Nähe jedes ihrer Punkte stets beliebig viele rationale Punkte auf der Geraden.

Gleichwohl aber haben diese Gerade und der Einheitskreis keinen rationalen Punkt gemeinsam, wie wir sahen.

Wir wollen weiter noch die Frage aufwerfen:

Welche dyadisch-rationalen Punkte liegen denn auf dem Einheitskreis in der euklidischen Geometrie, außer den Punkten $x = 0$, $y = \pm 1$ und $x = \pm 1$, $y = 0$?

Bei Beschränkung auf den Kreisquadranten mit positiven (x, y)-Koordinaten soll jetzt $x = \frac{p}{2^m}$ sein, wo p eine positive ungerade ganze Zahl, die kleiner als 2^m ist, und m eine von 0 verschiedene, positive ganze Zahl ist. Aus der Gleichung (1) S. 66 folgt dann

$$y = \frac{1}{2^m} \cdot \sqrt{2^{2m} - p^2}. \qquad (11)$$

Es muß dann $2^{2m} - p^2 = t^2$ sein, wo t eine positive ganze Zahl ist, oder

$$p^2 + t^2 = 2^{2m}. \qquad (12)$$

Da p ungerade ist, so muß auch t ungerade sein. Wir setzen

$$p = 2p_0 + 1,$$
$$t = 2t_0 + 1.$$

Dann folgt $$p^2 + t^2 = 2 \cdot [2p_0^2 + 2p_0 + 2t_0^2 + 2t_0 + 1]$$

oder $$2(p_0^2 + p_0 + t_0^2 + t_0) + 1 = 2^{2m-1}.$$

Diese Gleichung aber ist unmöglich für irgendwelche positive ganze Zahlen p_0, t_0 zu erfüllen, da die rechte Seite eine gerade, die linke Seite eine ungerade Zahl ist. Es ergibt sich also:

4. Der Einheitskreis enthält überhaupt keine von den Punkten $x = 0$, $y = \pm 1$ und $x = \pm 1$, $y = 0$ verschiedenen dyadisch-rationalen Punkte.

Als Verallgemeinerung des letzten Satzes sei noch der folgende genannt:

5. Bei Annahme eines bestimmten euklidischen Koordinatensystems geht ein beliebiger Kreis mit dyadisch-rationalem Mittelpunkt und Radius stets durch eine endliche Zahl von dyadisch-rationalen Punkten. Ist insbesondere der Mittelpunkt und Radius ganzzahlig, so haben die auf dem Kreise liegenden dyadisch-rationalen Punkte stets auch ganzzahlige Koordinaten (vgl. das Beispiel des Kreises um den Anfangspunkt mit dem Radius 5, Fig. 54).[1]

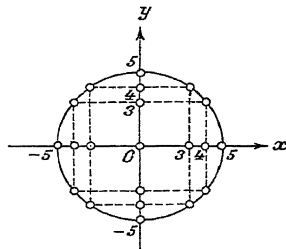



Fig. 54.

Analoge Betrachtungen können wir auch für eine beliebige Gerade der euklidischen Ebene, insbesondere für die Geraden durch den Koordinatenanfangspunkt, durchführen; doch sei hier darauf nur hingewiesen.

Alle diese vorstehenden Betrachtungen der euklidischen Geometrie zeigen uns einmal, daß die Verhältnisse hier über die Anschauung weit hinausgehen, sodann aber auch, daß wir uns gewiß nicht auf die rationalen oder gar die dyadisch-rationalen Punkte eines bestimmten, mit seinem Einheitspunkt zugrunde gelegten Koordinatensystems beschränken wollen. Und in der projektiven Geometrie liegen die Verhältnisse nicht anders. Wir gewinnen hieraus die Berechtigung zu dem am Anfang dieses Paragraphen ausgesprochenen Wunsche. —

Welche Stetigkeitsaxiome wollen wir nun einführen? Von Herrn Hilbert (a. a. O. 1930, S. 30) sind die folgenden beiden Axiome der Stetigkeit benutzt:

V, 1. (Axiom des Messens oder Archimedisches Axiom[2]): Sind AB und CD irgendwelche Strecken, so gibt es auf der Geraden AB eine Anzahl von Punkten $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$, so daß die Strecken $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \ldots A_{n-1}A_n$ der Strecke CD kongruent sind und B zwischen A und A_n liegt (Fig. 55).

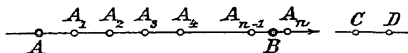



Fig. 55.

V. 2. (Axiom der linearen Vollständigkeit): Die Punkte einer Geraden a bilden ein System, welches bei Aufrechterhaltung der linearen Anordnung, des ersten Kongruenzaxioms und des Archimedischen

1) Wir können auch die interessante zahlentheoretische Frage aufwerfen: *Wie gewinnt man einen Überblick über alle dyadisch-rationalen Punkte mit dyadisch-rationalem Abstand vom Koordinatenanfangspunkt?*

2) Dieses Axiom ist jedoch schon vor Archimedes (287—212 in Syrakus) von anderen Geometern benutzt worden (vgl. O. Stolz, Math. Ann. Bd. 22, 1883, S. 504).

Axioms (d. h. der Axiome I 1—2, II, III 1, V 1) keiner Erweiterung mehr fähig ist, d. h. es ist nicht möglich, zu diesem System von Punkten Punkte auf a hinzuzufügen, so daß in dem durch Zusammensetzung entstehenden System sämtliche aufgeführten Axiome erfüllt sind.

Diese beiden Axiome wollen wir für unsere Betrachtung nicht einführen. Das Axiom V, 1 ist ja auch ein metrisches Axiom, da die Gleichheit von Strecken darin vorkommt; das Axiom V, 2 andererseits ist uns zu wenig auf anschaulichem Grunde aufgebaut.

Wir werden allein das folgende, auf Dedekind[1]) zurückgehende *projektive Stetigkeitsaxiom* zugrundelegen:

6. Es seien alle Punkte einer Strecke AP in zwei Klassen eingeteilt, so daß jeder Punkt zwischen A, P einer der beiden Klassen angehört, wobei der Punkt A der ersten und der Punkt P der zweiten Klasse angehöre, und jeder von A verschiedene Punkt der ersten Klasse liege zwischen A und jedem Punkte der zweiten Klasse. Dann existiert ein Punkt S der Strecke AP so, daß alle Punkte zwischen A, S der ersten Klasse angehören, alle Punkte zwischen S, P dagegen der zweiten Klasse, wobei der Punkt S selbst mit A oder mit P identisch sein kann und, wenn er dies nicht ist, entweder zur ersten oder zur zweiten Klasse gehören kann.

Es ist nun auch leicht zu übersehen:

7. Wenn es einen solchen Punkt S gibt, der die beiden Klassen von Punkten trennt, so kann es nur einen solchen Punkt geben.

Diese Aussage des Stetigkeitsaxioms, daß der Punkt S *existiert,* besagt natürlich nur, daß jedesmal im begrenzten Gebiet ein Strahlenbüschel existiert, dem wir den Punkt S zuordnen, mag dann dieser Punkt S im besonderen ein

1) R. Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1872, S. 11, sowie: Was sind und was sollen die Zahlen. Im Text gehen wir auf die Stetigkeit einer Geraden nur soweit ein, als es für unseren Aufbau der projektiven Geometrie wünschenswert ist. Betreffs aller übrigen Einzelfragen, besonders betreffs der Beziehung der von verschiedenen Forschern aufgestellten Stetigkeitsaxiome zueinander, zu denen außer den im Text genannten besonders noch Stetigkeitsaxiome von G. Cantor und Weierstraß treten (vgl. die Anm. S. 76), verweise ich auf das vortreffliche Referat von F. Enriques, Enzyklopädie III, 1, 1. Hälfte, Leipzig 1907—1910, S. 34—39 und S. 117—129, sowie auf die genannten Werke von Pasch, Hilbert, Schur und Heffter. Genannt sei ferner noch Felix Klein, Gutachten betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie anläßlich der ersten Verteilung des Lobatschewsky-Preises, Math. Ann. Bd. 15, 1897, Ges. math. Abhandlungen I, S. 395—398; O. Hölder, Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß, Berichte der Ges. d. Wiss. Leipzig Bd. 53, 1901, S. 1, sowie M. Dehn, Anhang zum Buche von M. Pasch, 1926, S. 239—248.

Bei Zugrundelegung des Dedekindschen Stetigkeitsaxioms ergibt sich übrigens später ein dem archimedischen Axiom äquivalenter Lehrsatz ganz von selbst.

eigentlicher oder ein uneigentlicher Punkt sein. Wir wollen aber ausdrücklich folgendes hervorheben:

8. Es genügt vollständig, wenn dieses Stetigkeitsaxiom nur für eine einzige Strecke AP ausgesprochen ist (wobei es ganz gleichgültig ist, ob diese Strecke AP nur aus inneren Punkten oder ganz oder zum Teil auch aus äußeren Punkten eines angenommenen begrenzten Gebietes, d. h. ganz oder zum Teil auch aus uneigentlichen Punkten, besteht). Aus dem Satze 11 S. 51 folgt nämlich unmittelbar:

9. Gilt das Dedekindsche Stetigkeitsaxiom für eine einzige Strecke AP, so klein diese auch etwa ist, so folgt seine Aussage als ein Lehrsatz für jede andere Strecke A_0P_0.

Denn sind etwa die Punkte der Strecke A_0P_0 in zwei Klassen eingeteilt der Voraussetzung des Dedekindschen Stetigkeitsaxioms entsprechend, so gilt gleiches auch für die durch die Kette der Projektionen mit ihr verbundene Strecke AP. Und wenn hier der Punkt S gemäß dem Dedekindschen Stetigkeitsaxiom existiert, so existiert der entsprechende Punkt S_0 auch auf der Strecke A_0P_0.

Ehe wir nun zum Beweise des Satzes 1 S. 65 das Stetigkeitsaxiom benutzen, wollen wir mit seiner Hilfe zunächst den folgenden Satz beweisen, den wir als *die projektive Übertragung des metrischen archimedischen Axioms* ansehen können[1]:

10. Es seien die beliebige Strecke AP und ein Punkt B auf ihr gegeben (Fig. 56). *Ferner seien der Reihe nach die Punkte $C, D, E, \ldots$ als vierte harmonische Punkte zu P, B, A bzw. P, C, B; P, D, C usw. konstruiert und den aufeinanderfolgenden Punkten $A, B, C, D, \ldots$*

A B C D E F X P

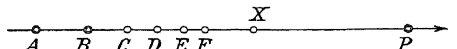



Fig. 56.

die Zahlenwerte $0, 1, 2, 3, \ldots$ beigelegt, wie dies ja alles in der Fig. 49 S. 59 auf der x-Achse geschehen ist (vgl. auch den Satz 6 S. 53 und die Festsetzung S. 62; hiernach liegen die Punkte $C, D, E, \ldots$ auch auf der Strecke AP, und zwar C zwischen B, P, ferner D zwischen C, P und so fort). *Ist dann irgendein Punkt X, der nicht schon ein Punkt der Reihe $A, B, C, \ldots$ selbst ist, zwischen A, P gegeben, so gibt es stets zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen $n, n+1$, so daß der Punkt X zwischen den beiden diesen Zahlen entsprechenden Punkten liegt.* Wir können gleich auch hervorheben, wozu dieser Satz uns dienen soll. Durch diesen Satz wird nämlich entschieden:

1) Dieser Satz ist als Axiom 15 aufgestellt von Herrn F. Schur, Grundlagen der Geometrie, S. 163, vgl. auch den Satz 122, S. 179 daselbst, sowie den Beweis analoger Sätze mit Hilfe des archimedischen Axioms bei M. Pasch, a. a. O. 1926, S. 115ff.

11. Es ist nicht möglich, eine Strecke XP, wo X auf der Strecke AP liegt, so anzugeben, daß innerhalb der Strecke XP kein Punkt der zuerst konstruierten Punkte mit ganzzahligen Abszissen auf der x-Achse in der Fig. 49 S. 59 läge. Aus dieser Tatsache werden dann weiter wichtige Folgerungen sich ergeben.

Wir können diese Strecke AP, wenn wir es der Anschauung zuliebe wollen, im begrenzten Gebiet gelegen annehmen; doch ist der folgende Beweis hiervon ganz unabhängig. Zum Beweise des Satzes 10 erkennen wir zunächst: *Wir können die Punkte der Strecke AP in zwei Klassen zerlegen, nämlich in die Klasse solcher Punkte, die innerhalb der Strecken AB, AC, AD, . . . liegen, und in die Klasse der übrigen Punkte, wobei noch der Punkt A der ersten Klasse zugeordnet sei.* Der Punkt P gehört dann sicher der zweiten Klasse an. Es ist dann für diese beiden Klassen von Punkten die Voraussetzung unseres Dedekindschen Stetigkeitsaxioms erfüllt. Ist nämlich X_1 ein Punkt der ersten Klasse, so muß er ja zwischen A, B oder A, C oder A, D, . . . gelegen sein. Beispielsweise liege er zwischen den Punkten A, D (Fig. 57). Ist ferner X_2 ein Punkt der zweiten Klasse, so muß X_1 auch zwischen A, X_2 liegen; denn es muß ja X_2 zwischen D, P liegen oder der Punkt P selbst sein, da eben alle Punkte der Strecke AD selbst einschließlich D zur ersten Klasse gehören. *Also existiert ein Punkt S mit der im Axiom angegebenen Eigenart, die beiden Klassen der Punkte voneinander zu trennen. Es sei nun angenommen, daß dieser Punkt S auf der Strecke AP etwa von dem Punkte P verschieden wäre* (Fig. 58). Wir suchen dann in bekannter Weise (mit Hilfe eines vollständigen Vierecks) zu A, S und P den vierten harmonischen Punkt T, der zwischen A, S gelegen sein muß, nach dem Satze 6 S. 53. Wir betrachten nun aus der Reihe der Punkte B, C, D, . . . mit den Zahlenwerten 1, 2, 3, . . . der Einfachheit halber allein die Punkte mit den Zahlenwerten 2, 4, 8, 16, . . ., 2^σ, . . ., wo σ eine positive ganze Zahl sei. Diese Punkte sind hier die vierten harmonischen Punkte zu den Punkttripeln $\infty, 1, 0$; $\infty, 2, 0$; $\infty, 4, 0$; $\infty, 8, 0$; . . ., wobei ∞ unserer obigen Festsetzung (S. 59) gemäß den Punkt P bezeichnet. Es zeigt dies ja ein Blick auf die Möbiussche Netzkonstruktion der Fig. 49 S. 59, indem wir etwa die vollständigen Vierecke U, Q, B', C'; U, Q, C'', E''; usw. betrachten. In den genannten Punkttripeln kommen ja stets die Punkte ∞ und 0, also P und A, vor, und dies erleichtert uns die Betrachtung.

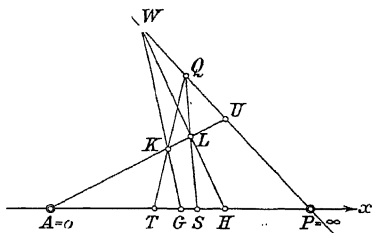



Fig. 57.

Fig. 58.

Es müssen nun notwendig beliebig viele Punkte der Reihe 2^σ zwischen S, T liegen. Denn zwischen S, P liegt nach unserer Annahme keiner dieser Punkte. Wenn auch zwischen S, T keiner der Punkte 2^σ läge, dann würde auch kein Punkt der ursprünglichen Reihe zwischen S, T liegen, also auch kein Punkt der ersten Klasse, was dem Dedekindschen Stetigkeitsaxiom widerspricht. (Wenn wir zunächst aber nur wissen, daß *ein* Punkt der ursprünglichen Reihe zwischen S, T liegt, so müssen auch *beliebig viele* Punkte der ursprünglichen Reihe wie der Reihe 2^σ zwischen S, T liegen.)

Es sei jetzt G ein solcher Punkt zwischen S, T aus der Reihe 2^σ für einen bestimmten Zahlenwert $\sigma = \sigma_0$ (Fig. 58). Dann aber behaupten wir: *Es liegt der vierte harmonische Punkt H mit dem Zahlenwert 2^{σ_0+1} zu P, G und A (oder zu ∞, 2^{σ_0}, 0) notwendig zwischen P, S.* Zum Beweise verbinden wir zunächst einen beliebigen Punkt U außerhalb der Geraden AP mit A und P und wählen auf UP einen Punkt W so aus, daß U zwischen P, W liegt. (Die ganze Figur können wir ja, unserer besseren Anschauung zuliebe, innerhalb des begrenzten Gebietes gelegen annehmen, vgl. auch den Satz 8 S. 49.) Wir ziehen dann die Verbindungslinie GW, welche das Dreieck APU in einem Punkte K zwischen A, U schneidet (nach dem Axiom II, 4). Der Punkt K liegt auch zwischen G, W, da die Gerade AU das Dreieck PGW zwischen G, W schneiden muß. Die Verbindungslinie TK schneidet dann das Dreieck PGW in einem Punkte Q zwischen P, W. Der Punkt Q muß aber auch zwischen U, W liegen, da sonst alle drei Seiten des Dreiecks APU durch TK innerlich geschnitten würden, was ja unmöglich ist. Die Verbindungslinie QS muß dann das Dreieck APU in einem Punkte L zwischen A, U schneiden. Der Punkt L muß aber auch zwischen Q, S liegen, da AU das Dreieck PQS zwischen Q, S schneiden muß. Endlich muß die Verbindungslinie WL das Dreieck PQS *in einem Punkte H zwischen P, S schneiden.*

Ebenso wie P, T, A, S sind ferner auch U, K, A, L und P, G, A, H vier harmonische Punkte. Hiermit hat sich aber ein Widerspruch gegen das Stetigkeitsaxiom ergeben, demgemäß ja auch der Punkt H oder 2^{σ_0+1} zwischen A, S gelegen sein müßte. *Es kann also der Punkt S, der nach dem Stetigkeitsaxiom die genannten beiden Klassen von Punkten auf der Strecke AP trennt, nicht vom Punkte P verschieden sein.* (Der Punkt P allein stellt demnach die Gesamtheit aller Punkte der zweiten Klasse dar.) Hieraus folgt aber sofort: *Jeder Punkt X zwischen A, P, der nicht schon ein Punkt der Reihe $A, B, C, D, \ldots$ ist, liegt zwischen zwei Punkten n, $n+1$* (Fig. 59), da ja zwischen X, P immer beliebig viele Punkte der Reihe 2^σ, also auch der ursprünglichen Reihe $A, B, C, D, \ldots$

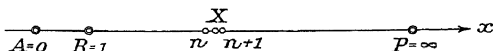



Fig. 59.

liegen. Und hiermit ist der Satz 10 S. 73 und seine Folgerung, der Satz 11, bewiesen.[1])

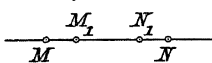
Wir wollen aber sogleich noch weitere wichtige *Folgerungen aus den Sätzen 10 und 11* gewinnen: Wir haben ja erkannt, daß in einer beliebig kleinen, vorgegebenen Strecke XP, wo der beliebige Punkt X auf der Strecke AP liegt, stets wenigstens ein Punkt der Reihe mit den Zahlenwerten $0, 1, 2, \ldots$ gelegen ist. (Hier ist folgende einfache *Definition* benutzt: *Von zwei aufeinanderliegenden Strecken MN und M_1N_1, bei denen die Punkte M_1, N_1 zwischen M, N liegen oder $N = N_1$ ist, wird die Strecke M_1N_1 als die kleinere bezeichnet,* Fig. 60.) Es folgt dann aber sogleich, daß zwischen X, P auch *beliebig viele* Punkte der Reihe $0, 1, 2, \ldots$ liegen müssen. Denn ist Y *ein* solcher Punkt der Reihe, der zwischen X, P liegt, so folgen ja auf Y noch beliebig viele Punkte der Reihe zwischen Y, P. Man bezeichnet daher nach C. Weierstraß den Punkt P (bei Übertragung einer in der Funktionentheorie gebräuchlichen Benennung) auch als eine „*Häufungsstelle*" der Punkte $0, 1, 2, \ldots$. (Definition: *Allgemein verstehen wir unter der Häufungsstelle einer unendlichen Reihe von Punkten einer Geraden einen solchen Punkt, so daß in jeder beliebig kleinen den Punkt einschließenden Strecke noch unendlich viele Punkte der Reihe liegen.*) Der Punkt P wird geometrisch auch der *Fluchtpunkt* der „harmonischen" Punktreihe $0, 1, 2, 3, \ldots$ genannt.[2])

M_1 N_1 M N

Fig. 60.

Wir können nun statt der Punktreihe $0, 1, 2, 3, \ldots$ der x-Achse in der Fig. 49 S. 59 jetzt auch die „negative harmonische" Punktreihe $0, -1, -2, -3, \ldots$ oder die Reihe der Punkte $A, (B), (C), (D), \ldots$ betrachten. Denken wir diese von dem Punkt U aus (Fig. 49) auf die y-Achse (in die Punkte mit den Ordinaten $0, 1, 2, 3, \ldots$) und dann von V aus auf die x-Achse projiziert, so entsteht hier wieder die Reihe der Punkte $0, 1, 2, 3, \ldots$. Hieraus folgt sofort:

1) Einen anderen Beweis des Satzes gibt L. Balzer, Über den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie, Math. Ann. Bd. 55, 1902, S. 295, sowie im Anschluß hieran Heffter-Koehler, Lehrbuch der analytischen Geometrie, Karlsruhe 1907, S. 22—23.

2) Diese Eigenschaft des Punktes P steht im engsten Zusammenhang mit dem Stetigkeitsaxiom von C. Weierstraß, das, wie man aus unseren folgenden Betrachtungen des Textes leicht erkennt, mit dem Dedekindschen Stetigkeitsaxiom gleichwertig ist und in projektiver Form wie folgt lautet: *Ist auf einer Strecke AP eine unbegrenzte Reihe aufeinanderfolgender Punkte $A, B, C, D, \ldots$ gegeben, so existiert ein Punkt S auf der Strecke derart, daß in jeder Umgebung von S wenigstens ein Punkt der Reihe liegt, zwischen P, S aber kein Punkt.* (Vgl. die Anm. S. 72.) Der Punkt S kann natürlich auch mit dem Punkte P identisch sein. Wir hätten also auch mit dem Stetigkeitsaxiom von Weierstraß alle Betrachtungen des Textes, die schließlich zu dem Satze 1 S. 65 hinführen, durchführen können. Wenn wir das Dedekindsche Stetigkeitsaxiom vorgezogen haben, so ist es deswegen geschehen, weil wir auf solche Weise mit beiden Axiomen vertraut werden.

12. Jeder Punkt X der den Punkt -1 *enthaltenden Strecke AP, die wir jetzt kurz mit* $\overrightarrow{PA}$ *bezeichnen wollen, ist stets zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten* $-n$ *und* $-(n+1)$ *gelegen, wenn er nicht mit einem der Punkte* $0, -1, -2, \ldots$ *selbst zusammenfällt.*

13. Der Punkt P ist demnach auch die Häufungsstelle der „negativen harmonischen" Punktreihe.

Der Punkt P ist also eine *zweiseitige Häufungsstelle;* er liegt auch stets auf der von den Punkten $+n$ und $-n$ begrenzten, den Punkt A nicht enthaltenden Strecke für jede positive ganze Zahl n, und diese von den Punkten $\pm n$ begrenzte Strecke wird mit wachsender Zahl n beständig kleiner und kleiner, und auch kleiner als jede beliebig kleine, angebbare Strecke, die den Punkt P enthält. Wir können letzteres auch so ausdrücken: Diese von den Punkten $\pm n$ begrenzte Strecke konvergiert für $\lim n = \infty$ gegen 0. *Durch diese Betrachtung ist nunmehr auch die Berechtigung dafür klargelegt, daß wir dem Punkte P die Zahl* ∞ *als Abszisse zuordnen.*

Wir erkennen aber noch weiter:

14. Betrachten wir jetzt die Reihe der Punkte $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ *oder die Reihe der Punkte* $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$ *auf der x-Achse bei der erweiterten Möbiusschen Netzkonstruktion* (Fig. 52 S. 63), *so haben diese beiden Reihen ersichtlich wieder die gemeinsame Häufungsstelle 0 oder A.* Der Beweis ist leicht auf den soeben für die Häufungsstelle P gegebenen zurückzuführen. Die Punkte $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ sind ja z. B. sukzessive die vierten harmonischen Punkte zu den Punkttripeln $0, 1, \infty;\ 0, \frac{1}{2}, \infty;\ 0, \frac{1}{4}, \infty; \ldots$. Wir könnten daher die Punkte der Reihe $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ in der Fig. 52 auch so durch eine Möbiussche Netzkonstruktion erhalten, daß wir ausgehend von den Punkten P, B, A, denen wir jetzt die Zahlenwerte $\bar{0}, \bar{1}, \bar{\infty}$ beilegen, nun die Punkte der genannten Reihe als vierte harmonische Punkte zu den neubenannten Tripeln $(\bar{\infty}, \bar{1}, \bar{0})$, $(\bar{\infty}, \bar{2}, \bar{0})$, $(\bar{\infty}, \bar{4}, \bar{0}), \ldots$ konstruieren. —

Wenn wir jetzt nun aber die *Gesamtheit aller Punkte mit dyadisch-rationaler Abszisse, die „dyadisch-rationalen" Punkte der x-Achse,* überblicken, so behaupten wir ferner:

15. Jeder einzelne von diesen Punkten ist eine Häufungsstelle für alle übrigen, d. h. in jeder beliebig kleinen Nähe jedes dyadisch-rationalen Punktes liegen beiderseits noch immer beliebig viele dyadisch-rationale Punkte.

Es genügt, zum Beweise beispielsweise einen einzelnen der Punkte, etwa den Punkt R für $x = \frac{3}{2}$ herauszugreifen. Ist dann B_0' der Schnittpunkt der Geraden QR und UA (Fig. 61, vgl. auch Fig. 52 S. 63), so denken wir die x-Achse zunächst von Q aus auf die Gerade PB_0' und dann von U aus zurück auf die x-Achse projiziert. *Jeder ursprüngliche dyadisch-rationale Punkt mit der Ab-*

szisse x geht dann in einen dyadisch-rationalen Punkt mit der Abszisse $(x - \frac{3}{2})$ über, wie die Fig. 52 S. 63 erkennen läßt. Hieraus folgt aber leicht, daß der Punkt $x = \frac{3}{2}$ ebenso eine beiderseitige Häufungsstelle ist wie der Punkt $x = 0$.

Was für die x-Achse gilt, gilt natürlich analog auch für die y-Achse. Somit können wir auch den allgemeinen Satz aussprechen:

16. Jeder dyadisch-rationale Punkt S der Ebene $\mathfrak{E}$ (d. h. jeder Punkt mit dyadisch-rationalen (x, y)-Koordinaten) ist eine Häufungsstelle, d. h. in jeder beliebigen Nähe des Punktes S liegen beliebig viele dyadisch-rationale Punkte. Sind S_x, S_y die Projektionen des Punktes S auf die x- bzw. y-Achse vom Punkte Q bzw. P aus (Fig. 62), so liegen ja in beliebiger Nähe von S_x auf der x-Achse bzw. von S_y auf der y-Achse beliebig viele dyadisch-rationale Punkte, und die Projektionsstrahlen dieser Punkte von Q bzw. P aus schneiden sich in den dyadisch-rationalen Punkten, die in der entsprechenden beliebigen Nähe des Punktes S liegen.

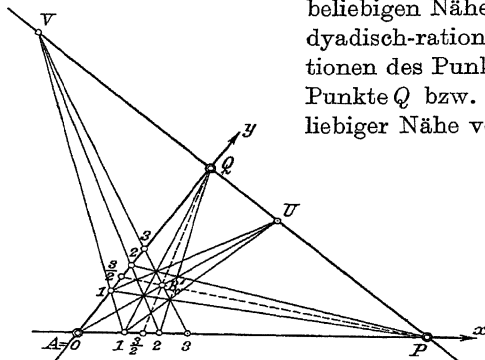
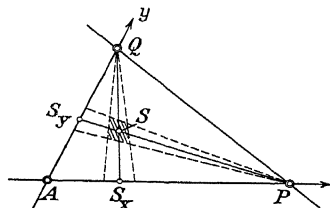



Fig. 61.

Fig. 62.

Von dem nunmehr gewonnenen Standpunkte wollen wir *das Stetigkeitsaxiom doch ganz allgemein noch etwas näher beleuchten.* Wir wollen jetzt noch einmal einen Blick zurückwerfen auf die S. 66 bereits betrachtete neue euklidische analytische Geometrie, in der nur die Punkte mit rationalen Koordinaten existieren sollen. Jetzt wollen wir die andere *neue euklidische Geometrie* kurz betrachten, in der nur die Punkte mit *dyadisch-rationalen* Koordinaten existieren sollen. Auch hier ist die ganze Ebene von diesen Punkten überall dicht erfüllt. Wir könnten demgemäß uns nicht etwa physikalisch vorstellen, daß die dyadisch-rationalen Punkte *die Mittelpunkte von Molekülen* wären, die vielleicht eine Kugelform mit sehr kleinem, aber angebbaren Radius hätten. Für eine den Raum anfüllende, aus Molekülen bestehende Masse bieten uns ja die Kristallgitter eine besonders übersichtliche Anordnung. Wir wollen im einfachsten Falle einmal annehmen, daß bei einem solchen Kristallgitter die Moleküle in den Punkten mit ganzzahligen (x, y, z)-Koordinaten angeordnet

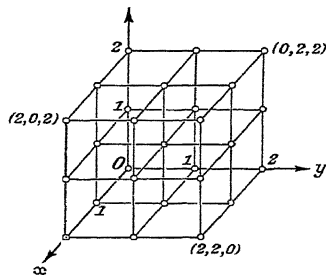
seien, wobei die Einheitsstrecke sehr klein sein soll. (Einfachstes Beispiel des tesseralen oder regulären Kristallsystems; Fig. 63.) Dann erkennen wir: *Von der Gesamtheit aller Mittelpunkte der Moleküle bis zu der Gesamtheit aller dyadisch-rationalen Raumpunkte ist doch noch ein großer Schritt.*[1]) Um so interessanter erscheint uns jetzt der Satz 4 auf S. 71; denn es ist doch höchst eigenartig, daß der Einheitskreis durch die Gesamtheit aller dyadisch-rationalen Punkte, die doch überall dicht liegen, noch hindurchkommt, ohne diese Punkte zu treffen, abgesehen von den vier genannten Punkten.

Fig. 63.

Das Stetigkeitsaxiom will ja im Grunde die Eigenschaften der Geraden im Unendlichkleinen klären. Es ist dementsprechend auch nicht von gleicher unmittelbarer Anschaulichkeit wie die bisher allein benutzten Axiome der Verknüpfung und Anordnung. Können wir uns doch die Gesamtheit aller dyadisch-rationalen Punkte schon nicht mehr anschaulich vorstellen. Viel weniger haben wir eine Anschauung von den dyadisch-irrationalen Punkten, die wir sogleich noch zwischen den dyadisch-rationalen Punkten auf Grund des Dedekindschen Stetigkeitsaxioms einschieben werden. Jedenfalls werden wir das Gefühl haben, daß in dem Stetigkeitsaxiom doch etwas Geheimnisvolles ausgesprochen ist, das wir eben nicht völlig anschaulich zu erfassen vermögen.

Das Stetigkeitsaxiom mit seinen Folgerungen für das Unendlichkleine steht somit *im Gegensatz zu dem Parallelenaxiom,* welches, wie wir schon sahen, die Frage durch bestimmte Festsetzung klären will, ob die Gerade in ihrer ganzen Ausdehnung unendlich groß ist und in welcher Weise oder ob sie endlich ist. Auch jedes Parallelenaxiom geht demgemäß über unsere Anschauung hinaus. Diese haftet doch eben allein am Endlichen (abgesehen also vom beliebig Großen und vom beliebig Kleinen).

Um die *Beziehung des Parallelenaxioms zum Stetigkeitsaxiom* uns noch etwas näher zu führen, wollen wir noch folgendes beachten: Wir wollen annehmen,

1) Dementsprechend hat Felix Klein bereits bemerkt (Gutachten zur ersten Verteilung des Lobatschewskij-Preises 1898, Ges. math. Abh. Bd. I, S. 395): Schon die Forderung der Existenz der rationalen Punkte (ebenso auch der dyadisch-rationalen Punkte), die durch eine Abszisse mit *sehr hohem* Nenner dargestellt werden, stellt, da schon solche Punkte empirisch nicht mehr nachgewiesen werden können, etwas Axiomatisches dar, was allerdings in der Allgemeingültigkeit der Axiome der Verknüpfung und Anordnung schon enthalten ist. Vgl. deswegen auch M. Pasch, a. a. O. 1926, § 23: „Die stetige Zahlenreihe in der Geometrie", insbesondere S. 174.

daß die uns bekannte euklidische Geometrie in der Ebene $\mathfrak{E}$ gelte. Auf einer Abszissenachse sei vom Anfangspunkt A aus die Einheitsstrecke beliebig oft nacheinander abgetragen, und dadurch seien die Punkte mit den Abszissen $x = 0, 1, 2, \ldots$ gewonnen (Fig. 64). Um den Anfangspunkt A sei der Kreis mit dem Radius 1 beschrieben. Zu einem beliebigen Punkt P mit positiver Abszisse $x \geqq 1$ sei zunächst der Punkt P_1 als Schnittpunkt der Abszissenachse mit der Berührungssehne, die zu den von P an den Kreis gelegten Tangenten gehört, konstruiert. Dann hat der Punkt P_1 die Abszisse $x_1 = \frac{1}{x}$. Wählen wir nun als den Punkt P sukzessive die Punkte mit den Abszissen $x = 1, 2, 4, 8, \ldots, 2^\sigma, \ldots$, so haben die entsprechenden Punkte P_1 die Abszissen $x_1 = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^\sigma}, \ldots$, sind also die in Fig. 48 S. 58 sukzessive auch konstruierten Punkte. Diese Punkte P_1 haben die Häufungsstelle $x_1 = 0$, während die entsprechenden Punkte P die Häufungsstelle $x = \infty$ haben, wenn wir den unendlich fernen Punkt der x-Achse, der ja durch das euklidische Parallelenaxiom eingeführt wird, adjungieren. (Wenn wir wollen, können wir ja auch von einem außerhalb der x-Achse gelegenen Punkt M aus sowohl die Punkte P wie die Punkte P_1 durch Strahlen projiziert denken und bei den Strahlenbüscheln die „Häufungsstrahlen" betrachten.) *Die Eigenart der Geraden im beliebig Weiten findet also hier ihre Abbildung durch die Eigenart der Geraden in beliebiger Nähe des Anfangspunktes A, d. h. im beliebig Kleinen.* Beide Eigenarten sind also doch sehr gleichartig.

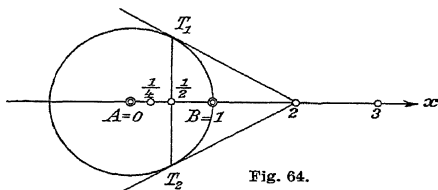



Fig. 64.

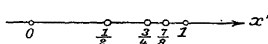
Wir denken noch in der letzten Figur die Strecke $\overrightarrow{AP_1}$ jedesmal von $B = 1$ aus bis P' so abgetragen, daß $\overrightarrow{P'B} = \overrightarrow{AP_1}$ ist; den Punkten $x_1 = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ entsprechen dann die Punkte $x' = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots$ (Fig. 65). Für entsprechende Punkte P, P' gilt also die Beziehung

$$x' = 1 - \frac{1}{x}.$$

Fig. 65.

Dann ist also jetzt der dem Punkt $x = \infty$ entsprechende Punkt $x' = 1$ die Häufungsstelle der Punkte P' mit den Abszissen $x' = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots$.

Diese letzte Figur gibt uns Veranlassung, an das bekannte *Beispiel des griechischen Sophisten Zenon von Elea* (ca. 500 v. Chr.), an den *Wettlauf zwischen Achilles und der Schildkröte* zu denken. Bei Beginn des Wettlaufes sei Achilles an der Stelle $x' = 0$, die Schildkröte an der Stelle $x' = \frac{1}{2}$. Nun soll Achilles doppelt so schnell laufen als die Schildkröte. Die Sophisten wollen nachweisen, daß Achilles die Schildkröte niemals einholen kann. Sie sagen etwa: Wenn

Achilles sich an der Stelle $x' = \frac{1}{2}$ befindet, ist die Schildkröte an der Stelle $x' = \frac{3}{4}$, und wenn Achilles diese Stelle erreicht hat, so ist die Schildkröte an der Stelle $x' = \frac{7}{8}$ und so fort ohne Ende. Jedenfalls sehen wir aus diesem Beispiel, daß bereits die alten Griechen über den Begriff der Stetigkeit der Geraden sich in ihrer Weise arg den Kopf zerbrochen haben.

Interessant mag es sein, bei der Transformation $x' = 1 - \frac{1}{x}$ die Abszisse x einmal *als die Zeit t des Intervalles* $1 \leqq t \leqq +\infty$ und x' *als die Zeit t' einer neuen Welt,* welche den zeitlichen Verlauf der alten abbildet, zu denken. (Beim Kinematographen ist uns ja eine anschauliche Ausdehnung oder Verkürzung der Zeit (Zeitlupe) wohlbekannt.) Die Ewigkeit $1 \leqq t \leqq +\infty$ findet dann ihr Abbild in der Einheitszeit $0 \leqq t' \leqq 1$. In dieser neuen Welt, in die wir uns ja einmal hineinträumen können, erfolgt also der Verlauf der gleichen Zeitabschnitte der alten für alles Geschehen immer schneller und schneller. Die Planeten z. B. würden sich mit immer weiter gesteigerter Geschwindigkeit um die Sonne bewegen: Wie sieht das Ende dieser Welt zur Zeit $t' = 1$ aus? Alle diese Betrachtungen sind deswegen ausgeführt, damit wir uns mit dem geheimnisvollen geometrischen Stetigkeitsaxiom doch etwas mehr menschlich befreunden. Jedenfalls erkennen wir, daß *unsere Gedankenwelt doch weit über unsere Vorstellungswelt hinausreicht.*

§ 10. Erweiterung des Koordinatensystems auf dyadisch-irrationale Koordinatenzahlen.

Das Stetigkeitsaxiom 6 des § 9 setzt uns nun in den Stand, auch *den am Anfang des § 9 in Aussicht gestellten wichtigen Satz zu beweisen.*

Es sei *ein beliebiger Punkt X* der x-Achse herausgegriffen; der Einfachheit halber können wir zunächst annehmen, daß der Punkt X derjenigen Strecke AP angehört, auf der auch die Punkte mit *positiven* dyadisch-rationalen Abszissen liegen (Fig. 66). Wenn der Punkt X selbst ein dyadisch-rationaler Punkt ist, so ist ihm ja bereits eine bestimmte Abszissenzahl x zugeordnet. Wir wollen weiter aber

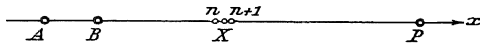



Fig. 66.

die Möglichkeit betrachten, daß der Punkt X *kein dyadisch-rationaler* Punkt wäre. Dann gibt es nach dem Satze 10 S. 73 zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen n, $n+1$, so daß der Punkt X zwischen den entsprechenden Punkten liegt. Wenn wir nun weiter die Reihe der Punkte $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ auf der Strecke AP betrachten, so gibt es ebenfalls zwei aufeinanderfolgende Punkte dieser Reihe $n + \frac{\alpha}{2}$ und $n + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}$, wo α gleich 0 oder gleich 1 ist, zwischen denen der Punkt X gelegen sein muß. (Wir brauchten, um dies zu erkennen, in der Möbiusschen Netzfigur 52 S. 63 nur für einen Augenblick

den Punkten A, B, P die Zahlenwerte $\bar{0}, \bar{2}, \bar{\infty}$ zuzuordnen; dann würden die Punkte der alten Reihe $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ jetzt die neuen Zahlenwerte $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \ldots$ erhalten, und auf die Reihe der Punkte mit diesen neuen Abszissen ist unmittelbar der Satz 10 S. 73 anzuwenden.)

Analog liegt der Punkt X in der Reihe der Punkte $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \ldots$ zwischen zwei Punkten

$$n + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{4} \text{ und } n + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{4} + \frac{1}{4},$$

wo auch β gleich 0 oder 1 ist.

So fortschreitend finden wir stets zwei solche dyadisch-rationale Punkte, deren Abszissen durch die Reihen

$$n + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{4} + \frac{\gamma}{8} + \cdots + \frac{\nu}{2^\sigma} \text{ und } n + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{4} + \frac{\gamma}{8} + \cdots + \frac{\nu}{2^\sigma} + \frac{1}{2^\sigma}$$

mit einer endlichen, doch beliebig großen Zahl von Gliedern dargestellt sind, daß der Punkt X zwischen diesen beiden Punkten gelegen ist. Die Differenz dieser beiden Reihen ist ja gleich $\frac{1}{2^\sigma}$. Es ist hiermit natürlich noch nicht gezeigt, daß es einen Punkt X überhaupt gibt, der mit keinem dyadisch-rationalen Punkt zusammenfällt. Auch ist noch nicht gezeigt, daß nicht etwa zwei verschiedene Punkte X_1, X_2 stets zwischen den durch die obigen Reihen dargestellten Punktepaaren liegen, und damit auch *alle* Punkte der Strecke X_1, X_2, d. h. daß es eine Strecke X_1X_2 gibt, die überhaupt ganz frei von dyadisch-rationalen Punkten ist. Dies letztere werden wir aber sogleich als unmöglich nachweisen. Soviel können wir aber jetzt sagen:

1. Wenn es irgendeinen solchen nicht dyadisch-rationalen Punkt X gibt, so ist ihm naturgemäß als Abszisse diejenige dyadisch-irrationale Zahl zuzuordnen, welche den gemeinsamen Grenzwert der beiden obigen, gegeneinander konvergierenden Reihen, nämlich

$$x = n + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{4} + \frac{\gamma}{8} + \cdots \text{ in inf.}$$

darstellt, wo die Ziffern $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ja gleich 0 *oder gleich* 1 *sind.* (Natürlich können die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ von einer bestimmten Stelle an nicht *sämtlich* gleich 0 und nicht *sämtlich* gleich 1 sein, gemäß dem Satze 15 S. 77. Es kann z. B. keinen vom Punkte $x = 1$ verschiedenen Punkt geben, der nach unseren Ausführungen durch die Abszisse $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$ in inf. dargestellt wird.) Mit anderen Worten:

*2. Jedem (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkte der Strecke AP wird daher auf jeden Fall **eindeutig** ein bestimmter Zahlenwert x als Abszisse zugeordnet.*

Auch sei darauf hingewiesen, daß die Punkte der Strecke AP so aufeinander folgen wie die ihnen zugewiesenen Abszissen, d. h. wenn $x'' > x'$ ist für zwei

Punkte X', X'' mit den Abszissen x', x'', so liegt notwendig X'' zwischen X', P.

Wenn nun aber *umgekehrt eine beliebige positive Zahl x gegeben* ist, so läßt sie sich ja in der dyadischen Reihe darstellen

$$x = n + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{4} + \frac{\gamma}{8} + \cdots$$

mit der für die Zähler gültigen Bedingung. Besteht diese Reihe aus einer endlichen Zahl von Gliedern, so entspricht ihr ja ein bestimmter dyadisch-rationaler Punkt. Wir betrachten nun weiter den Fall, daß die Reihe jetzt aus einer *unendlichen* Anzahl von Gliedern besteht, so daß also x eine dyadisch-irrationale Zahl ist. (Die Reihe der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ kann von einer gewissen Stelle ab periodisch sein (vgl. S. 65), oder es tritt dies nicht ein; dementsprechend läßt sich die Zahl x durch einen gewöhnlichen Bruch mit einem Nenner, der nicht eine Potenz von 2 ist, darstellen oder durch keinen gewöhnlichen Bruch. Im ersten Falle ist x eine dyadisch-irrationale, doch rationale Zahl, im letzten Fall ist aber x eine irrationale Zahl.)

Dann aber können wir alle Punkte der Strecke AP in zwei Klassen einteilen derart, daß die Punkte der ersten Klasse eine Abszisse $< x$, die Punkte der zweiten Klasse eine Abszisse $\geqq x$ besitzen. Es besteht dann weiter auch die Bedingung des Dedekindschen Stetigkeitsaxioms 6 S. 72, daß jeder (von A verschiedene) Punkt X_1 der ersten Klasse stets innerhalb AX_2 gelegen ist, wo X_2 ein beliebiger Punkt der zweiten Klasse ist. Dem Stetigkeitsaxiom 6 und dem Satze 7 S. 72 entsprechend *existiert* dann *ein* Punkt S, der die beiden Klassen voneinander trennt und dann ersichtlich die Abszisse x besitzt nach dem Satze 1.

Nun aber können wir die Punkte der Strecke AP auch wie folgt *auf andere Weise in zwei Klassen einteilen:* Die Punkte der ersten Klasse sollen eine Abszisse $\leqq x$, die Punkte der zweiten Klasse eine Abszisse $> x$ besitzen. Auch für diese beiden Klassen besteht wieder die Bedingung des Dedekindschen Stetigkeitsaxioms. Es *existiert* also *ein* Punkt S', der die beiden Klassen voneinander trennt und dann auch die Abszisse x besitzt nach dem Satze 1. Nun aber müssen wir die eigenartige Bemerkung machen:

Es ist doch zunächst noch die Möglichkeit offen, daß die (nicht dyadisch-rationalen) Punkte S, S' zwei verschiedene Punkte sind. Es muß dann aber S' zwischen S, P liegen, und *alle* Punkte der Strecke SS' würden nach dem Satze 1 dieselbe Abszisse x_0 besitzen, d. h. *es würde jetzt eine Strecke SS' geben, innerhalb der kein dyadisch-rationaler Punkt gelegen ist* (Fig. 67).

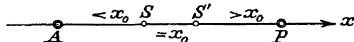



Fig. 67.

Um diese Möglichkeit uns näher zu führen, wollen wir jetzt einmal in der euklidischen Geometrie uns aus dem gewöhnlichen x-Abszissensystem einer Geraden ein neues $\bar{x}$-Abszissensystem gebildet denken, bei dem jedoch die Abszisse $\bar{x}$ eine *reine Zahl*, keine Länge bedeuten soll. Es soll

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x && \text{sein für} \quad 0 \leqq x \leqq 1, \\ \bar{x} &= \bar{1} && \text{für} \quad 1 \leqq x \leqq 2, \\ \bar{x} &= x - 1 && \text{für} \quad 2 \leqq x \leqq +\infty. \text{ (Fig. 68.)} \end{aligned}$$

Auch hier können wir z. B. die Punkte der Strecke AP, für die $0 \leqq \bar{x} \leqq \bar{2}$ gilt, in der doppelten Weise in zwei Klassen zerlegen, entweder in die Klasse aller Punkte $\bar{x} < \bar{1}$ und $\bar{x} \geqq \bar{1}$ oder in die Klasse der Punkte $\bar{x} \leqq \bar{1}$ und $\bar{x} > \bar{1}$. Hier gibt es in der Tat zwei verschiedene Punkte S, S', welche je die beiden Klassen voneinander trennen. Wir stellen nun aber die Behauptung auf:

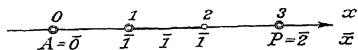



Fig. 68.

3. Die beiden Punkte S, S', die wir oben auf der projektiven x-Achse erhalten haben, sind notwendig identisch[1]), oder mit anderen Worten:

3a. Es gibt keine endliche Strecke SS', innerhalb der kein dyadisch-rationaler Punkt gelegen ist.

Wir werden den Beweis des Satzes 3 indirekt führen, indem wir zeigen: Die Annahme zweier solcher verschiedener (nicht dyadisch-rationaler) Punkte S, S' führt notwendig zu einem Widerspruch. Wir müssen zu dem Zweck zur *geometrischen Konstruktion unseres Abszissensystems*, d. h. zu der Figur der Möbiusschen Netzkonstruktion zurückgehen. Wir können aber die hier in Betracht kommende Figur ganz innerhalb eines begrenzten Gebietes gelegen sein lassen. *Als begrenztes Gebiet wählen wir hier einfach das Fundamentaldreieck APQ selbst* (mit dem Einheitspunkt im Innern).

Vorerst wollen wir noch folgendes hervorheben: Im Falle einer *dyadisch-irrationalen* Abszisse x können wir ja *diese Zahl x von beiden Seiten* durch je eine Reihe dyadisch-rationaler Zahlen mehr und mehr annähern. Die Zahl $\frac{4}{3}$ z. B. wird durch die unendliche Reihe dargestellt

$$x = \frac{4}{3} = 1 + \frac{0}{2} + \frac{1}{4} + \frac{0}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

(wobei hier die Zähler die Periode 0, 1 besitzen). Die beiden Reihen der dyadisch-rationalen Zahlen sind dann gegeben durch die Zahlen auf den linken bzw. den rechten Seiten der folgenden Ungleichungen:

1) In der Literatur scheint diese Lücke der bisherigen Beweisführung niemals bemerkt zu sein (vgl. z. B. Heffter-Koehler, Lehrbuch der analytischen Geometrie, I, Karlsruhe 1927, S. 23, Nr. 16). In der Analysis, d. h. bei der Aufstellung der Zahlenreihe, kommt natürlich eine solche Lücke nicht vor. Hier aber handelt es sich um die Beziehung der Zahlenreihe zu den Punkten der Geraden AP.

$$1 < x < 1 + 1$$
$$(1 + \tfrac{0}{2}) < x < (1 + \tfrac{0}{2}) + \tfrac{1}{2}$$
$$(1 + \tfrac{0}{2} + \tfrac{1}{4}) < x < (1 + \tfrac{0}{2} + \tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{4}$$
$$(1 + \tfrac{0}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{0}{8}) < x < (1 + \tfrac{0}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{0}{8}) + \tfrac{1}{8}$$

und so fort. Die Differenz der beiden Seiten der Ungleichungen ist hier in unserem Beispiel, wie in jedem anderen Falle, bzw. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^\sigma}, \ldots$.

Ganz analog folgt geometrisch, den Betrachtungen der S. 81ff. entsprechend:

Die Strecke SS' läßt sich sukzessive durch je zwei dyadisch-rationale Punkte einschließen, deren Abszissen den Zahlen auf den beiden Seiten der einzelnen Ungleichungen entsprechen und die Abszissendifferenzen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ *besitzen.*

Diese Punktepaare mit der Abszissendifferenz $\frac{1}{2^\sigma}$ seien mit G_σ, H_σ, ihre Abszissen mit x_σ, $x_\sigma + \frac{1}{2^\sigma}$ bezeichnet, für $\sigma = 0, 1, 2, \ldots$. Unsere Sätze 3 und 3a kommen nun darauf hinaus:

Die beiden Reihen der dyadisch-rationalen Punkte G_σ, H_σ besitzen dieselbe Häufungsstelle $S = S'$ (vgl. das Axiom von Weierstraß, S. 76 Anm. 2).

Natürlich werden die Strecken $G_\sigma H_\sigma$ mit zunehmendem σ immer kleiner. Doch wollen wir beachten, daß hierbei *beide* Endpunkte G_σ und H_σ sich ändern. Wohl haben wir bereits in den Sätzen 14 und 15 S. 77 gezeigt: Eine veränderliche Strecke, deren einer Endpunkt G ein *fester* dyadisch-rationaler Punkt ist und deren anderer Endpunkt H_σ ein dyadisch-rationaler Punkt mit einer um $\frac{1}{2^\sigma}$ größeren Abszisse ist, wird kleiner als jede vorgegebene Strecke GK, wo K ein beliebiger, doch bestimmter Punkt innerhalb der ursprünglichen Strecke GH_0 für $\sigma = 0$ ist, wenn eben σ nacheinander die Werte $0, 1, 2, \ldots$ annimmt. Jetzt gilt es, dieses Resultat insofern zu erweitern, als nun auch der Anfangspunkt der Strecke in der angegebenen Weise veränderlich sein soll. Diese Erweiterung werden wir auf den vorgenannten speziellen Fall zurückzuführen suchen.

Wir betrachten nun in der Fig. 69 der Möbiusschen Netzkonstruktion zunächst einmal die beiden dyadisch-rationalen Punkte G_1, H_1 mit den Abszissen x_1, $x_1 + \frac{1}{2}$, also der Abszissendifferenz $\frac{1}{2}$, und die von diesen Punkten eingeschlossene Strecke SS'. (Hierbei hat also entweder G_1 oder H_1 eine *ganzzahlige* Abszisse x bzw. $x + \frac{1}{2}$.) Es sei dann der Punkt G_1 von Q aus auf AU nach $G_1{}^*$ projiziert und dann auch H_1 von Q aus auf die Gerade $PG_1{}^*$ nach $H_1{}^*$. Wir werden in der Folge sehr oft nun das Axiom II, 4 anzuwenden haben, das ja die Lage des Schnittpunktes einer Geraden mit der *dritten* Seite eines Dreiecks hinsichtlich der Ecken dieser Seite festlegt, wenn für die Schnitt-

punkte auf den beiden ersten Dreiecksseiten bereits die Lage zu den betreffenden beiden Ecken bekannt ist. Wir begnügen uns im folgenden der Einfachheit halber bei den Beweisen solcher Lagenbeziehungen damit, in Klammern nur immer das Dreieck und die Gerade zu nennen, für welche das Axiom II, 4 in Anwendung kommt. Es liegt jetzt G_1^* zwischen A, U (ΔAUP und QG_1) und zwischen Q, G_1 (ΔQG_1P und AU). Es liegt ferner H_1^* zwischen G_1^*, P ($\Delta G_1^*PG_1$ und QH_1). Darauf seien die Punkte G_1^*, H_1^* von U aus wieder auf die x-Achse projiziert. *Dann fallen diese Projektionen der Punkte* G_1^*, H_1^* *in die Punkte* A *und* $\overline{H}_1$, *d. h. in die Punkte* 0 *und* $\frac{1}{2}$. Wir bemerken, daß alle bisher gezogenen projizierenden Strahlen bereits in der soweit durchgeführten Möbiusschen Netzfigur enthalten sind, daß sich alle Punkte bis zu denen einer Abszisse mit dem Nenner 2 auf der x-Achse ergeben haben.

Fig. 69.

Hieraus folgt dann auch die letzte hervorgehobene Tatsache; wir brauchen ja nur einen Blick auf die Fig. 70 zu werfen, in der ja die Punkte mit den Koordinaten $\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$, wo n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl ist, auf der Geraden AU, die entsprechenden Punkte mit den Koordinaten $\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)$ aber auf der Verbindungslinie des Punktes $(\frac{1}{2}, 0)$ mit dem Punkte U liegen.

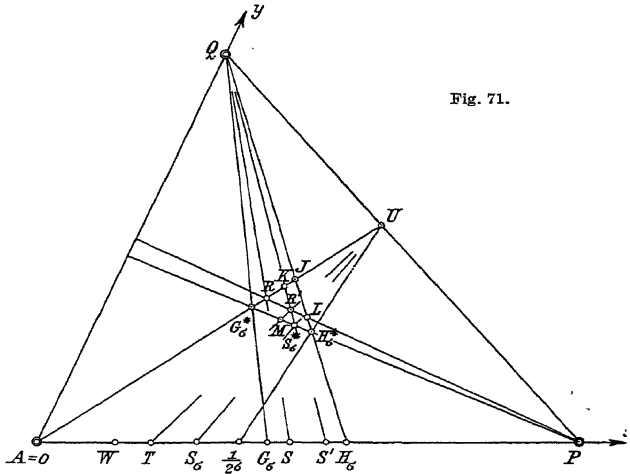
Fig. 70.

Wir projizieren nun weiter auch den Punkt S' der zwischen $G_1 H_1$ liegenden Strecke SS' von Q aus auf G_1^*P nach S_1^* und dann von U aus auf die x-Achse

nach S_1 (Fig. 69). Es liegt dann S_1^* zwischen G_1^*, H_1^* ($\Delta G_1^* P G_1$ und QS', d. h. S_1^* zwischen G_1^*, P, und $\Delta H_1^* P H_1$ und QS', d. h. S_1^* nicht zwischen H_1^*, P) und es liegt S_1 zwischen den Punkten 0 und $\frac{1}{2}$ ($\Delta A P G_1^*$ und $U S_1$, d. h. S_1 zwischen A, P, und $\Delta \overline{H}_1 P H_1^*$ und $U S_1$, d. h. S_1 nicht zwischen $\overline{H}_1$, P). Wir haben daher das Resultat gewonnen:

Die Strecke $G_1 S'$ wird durch die genannten beiden Projektionen in eine Strecke $A S_1$ projiziert, die kleiner als die Strecke von 0 bis $\frac{1}{2}$ der x-Achse ist.

Fig. 71.

Wir wollen nun die weitere Betrachtung, die doch über unsere unmittelbare Anschauung hinausgeht, also gleichsam rein logischer Natur ist, trotzdem durch die neue, allerdings schematische Fig. 71 veranschaulichen, in der nach wie vor das Fundamentaldreieck APQ das begrenzte Gebiet darstellt. In dieser Figur sind jetzt auf der x-Achse die Punkte G_σ, H_σ mit den Abszissen x_σ und $x_\sigma + \frac{1}{2^\sigma}$ und S, S' gegeben. Wir wissen, daß die Punkte $A, G_\sigma, S, S', H_\sigma, P$ in dieser Reihenfolge aufeinanderfolgen. Es sei wieder AU mit QG_σ in G_σ^* geschnitten. Dann liegt G_σ^* zwischen A, U und Q, G_σ. Ferner ziehen wir die Gerade PG_σ^* und schneiden sie mit QS' und QH_σ in S_σ^* und H_σ^*. Sodann seien die Punkte G_σ^*, S_σ^* und H_σ^* von U aus auf die x-Achse in die Punkte A, S_σ, $\frac{1}{2^\sigma}$ projiziert. Ganz analog läßt sich nun zeigen, was wir nicht weiter auszuführen brauchen:

Die Strecke $G_\sigma S'$ wird durch die entsprechenden beiden Projektionen (von Q aus auf $G_\sigma^* P$ und dann von U aus auf die x-Achse) *in eine Strecke AS_σ projiziert, die kleiner als die Strecke von 0 bis $\frac{1}{2^\sigma}$ der x-Achse ist.* (Die Punkte G_σ^* sind hierbei natürlich für verschiedene Zahlen σ verschiedene Punkte auf AU und also auch $G_\sigma^* P$ verschiedene Geraden.) Jetzt aber gilt offenbar:

Wir können stets σ so groß wählen, daß die projizierte Strecke AS_σ kleiner wird als eine beliebig kleine vorgegebene Strecke AW, wo W zwischen A, B gelegen ist. Denn es wird ja die Strecke von 0 bis $\frac{1}{2^\sigma}$ für eine hinreichend große Zahl σ kleiner als AW, gemäß dem Satze 14 S. 77.

Die Fig. 71 wollen wir nun aber noch vervollständigen. Hierbei wollen wir wieder die Lage aller weiterhin konstruierten Punkte genau verfolgen.

Es liegt zunächst ja H_σ^* zwischen G_σ^*, P ($\Delta G_\sigma^* P G_\sigma$ und Gerade QH_σ) und: S_σ^* zwischen G_σ^*, H_σ^* ($\Delta G_\sigma^* P G_\sigma$ und QS', d. h. S_σ^* zwischen G_σ^*, P und $\Delta H_\sigma^* P H_\sigma$ und QS', d. h. S_σ^* nicht zwischen H_σ^*, P).

Es sei J der Schnitt von QH_σ und AU. Es liegt J zwischen G_σ^*, U ($\Delta G_\sigma^* U P$ und QH_σ) und zwischen H_σ^*, Q ($\Delta H_\sigma^* Q P$ und AU).

Es sei K der Schnitt von QS' und AU. Es liegt K zwischen G_σ^*, J ($\Delta G_\sigma^* J H_\sigma^*$ und QS').

Es sei R der Schnitt von QS und AU. Es liegt R zwischen G_σ^*, K ($\Delta AKS'$ und QS, d.h. R zwischen A, K und $\Delta A G_\sigma^* G_\sigma$ und QS, d.h. R nicht zwischen A, G_σ^*).

Es sei L der Schnitt von PR und QH_σ. Es liegt L zwischen J, H_σ^* ($\Delta J H_\sigma^* G_\sigma^*$ und PR).

Es sei R' der Schnitt von PR und QS'. Es liegt R' zwischen K, S_σ^* ($\Delta K S_\sigma^* G_\sigma^*$ und PR) und zwischen L, R ($\triangle LRJ$ und QS').

Es sei M der Schnitt von UR' und $G_\sigma^* P$. Es liegt M zwischen G_σ^*, S_σ^* ($\Delta G_\sigma^* S_\sigma^* K$ und UR').

Es seien endlich $\frac{1}{2^\sigma}$, S_σ und T die Schnittpunkte der x-Achse mit UH_σ^*, US_σ^* und UM. Wir wissen aber bereits, daß S_σ zwischen 0 und $\frac{1}{2^\sigma}$ liegt. Es liegt weiter T zwischen A, S_σ (ΔAPR und UT, d. h. T zwischen A, P und $\Delta S_\sigma P S_\sigma^*$ und UT, d. h. T nicht zwischen S_σ, P).

Nun ist AT eine *bestimmte* Strecke, wenn SS' eine bestimmte Strecke ist, d. h. S, S' verschiedene Punkte sind. Aber AS_σ kann ja nun beliebig klein gemacht werden, also jedenfalls kleiner als AT. Dann aber kann T nicht zwischen A, S_σ liegen. Wir sind also zu einem *Widerspruch* geführt, d. h. die Strecke SS' kann nicht eine bestimmte Strecke sein, *vielmehr müssen die Punkte S, S' identisch sein.*

Somit haben wir jetzt auch den Satz gewonnen:

4. Jedem positiven Zahlenwert x entspricht stets ein und nur ein Punkt der Strecke AP.

Man drückt sich auch wohl so aus, daß der Punkt S als der Trennungspunkt der beiden Klassen einen *Dedekindschen Schnitt* der Strecke AP darstellt.

Nun läßt sich ersichtlich für die beiden Punkte der Abszissenachse der ergänzenden Strecke AP, der die Punkte mit *negativen* dyadisch-rationalen Abszissen angehören, die gleiche Betrachtung durchführen. (Vom Punkte U der Fig. 52 S. 63 könnten wir ja auch die Punkte der soeben genannten Strecke AP auf die y-Achse und dann vom Punkte V auf die x-Achse in die

Punkte der Strecke AP mit positiven Abszissen projiziert denken.) Nochmals sei auch hervorgehoben, daß unsere Betrachtung keinen Unterschied zu machen braucht, ob eigentliche oder uneigentliche Punkte der x-Achse etwa in Frage kommen. Wir können ja statt der Punktreihe auf der x-Achse auch das sie projizierende Strahlenbüschel mit einem außerhalb der x-Achse gelegenen inneren Träger M, evtl. den Punkt Q der Fig. 52, analog betrachten.

Nunmehr ist also der Satz 1 S. 65 vollständig bewiesen. Wir heben jedoch noch den wichtigen Zusatz hervor:

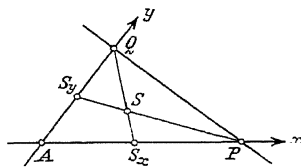
5. *Diese im vorstehenden durchgeführte eineindeutige Zuordnung der Punkte auf der x-Achse und ihrer Abszissen x ist auch insofern eine stetige Zuordnung, als die Punkte der x-Achse ebenso aufeinanderfolgen wie ihre entsprechenden Zahlenwerte x in der natürlichen Zahlenreihe,* oder anders ausgesprochen:

Liegt z. B. ein Punkt der Strecke AP mit positiven Abszissen ihrer Punkte „zwischen“ zwei anderen Punkten dieser Strecke, so liegt auch stets der zugeordnete Zahlenwert des ersten Punktes zwischen den zugeordneten Zahlenwerten der beiden anderen Punkte.

Wir können also jetzt auch von dem *Durchlaufen einer Strecke* der x-Achse, z. B. der eben genannten Strecke AP, und zwar vom Punkte A bis zum Punkte P, sprechen. Wir verstehen hierunter, daß wir die Punkte der Strecke in der Reihenfolge ihrer Zahlenwerte von 0 bis ∞ überblicken. Analog können wir auch sagen: Ein Punkt X soll die Strecke AP von A bis P durchlaufen oder sich von A bis P bewegen.

Was wir bisher für die Punkte der x-Achse ausgeführt haben, gilt natürlich analog für die Punkte der y-Achse. Damit aber übertragen sich unsere Betrachtungen auch auf die Gesamtheit der Punkte in der projektiven Ebene, wobei wir jetzt nur noch sogleich den Punkten der Geraden PQ der Fig. 52 S. 63 eine Zusatzbemerkung zu widmen haben.

Fig. 72.

6. *Jedem nicht auf PQ gelegenen Punkte S unserer projektiven Ebene ordnen wir jedenfalls diejenigen beiden (endlichen) Koordinaten x, y zu, welche die Schnittpunkte der Verbindungslinien QS und PS mit der x- bzw. y-Achse besitzen* (Fig. 72).

Wie werden wir nun aber auch die Punkte der Geraden PQ in unser Koordinatensystem einbeziehen? Zunächst wollen wir überhaupt statt der x, y-Koordinaten die *drei homogenen Koordinaten* ξ_1, ξ_2, ξ_3 einführen durch die Gleichungen

$$x = \frac{\xi_1}{\xi_3}, \quad y = \frac{\xi_2}{\xi_3}$$

mit der *Festsetzung: Von diesen neuen Koordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3, auf deren Verhältnisse es nur ankommt, soll keine ∞ groß sein; auch höchstens zwei von ihnen sollen gleich 0 sein.*

Für die nicht auf PQ gelegenen Punkte der projektiven Ebene ist also ξ_3 von 0 verschieden. Um nun auch die Punkte der Geraden PQ jetzt einzubeziehen, werfen wir einen Blick auf die Möbiussche Netzkonstruktion (Fig. 52 S. 63) zurück: Die Gerade AU daselbst ist ja der geometrische Ort der Schnittpunkte für solche zwei entsprechenden Strahlen der Strahlenbüschel (P) und (Q), welche die x-Achse und die y-Achse in zwei Punkten mit der Bedingung $x = y$ schneiden. Mit anderen Worten: Jeder Punkt der Geraden AU hat dieselbe Abszissen- und Ordinatenzahl. Wir müssen nun schon ein Ergebnis hier vorwegnehmen, das wir erst durch den Satz 4 S. 101 gewinnen, nämlich den Satz:

7. Jede beliebige Gerade durch den Punkt A ist der geometrische Ort der Schnittpunkte für solche zwei entsprechenden Strahlen der Strahlenbüschel (P) und (Q), welche die x-Achse und die y-Achse in zwei Punkten mit der Bedingung

$$\frac{x}{y} = \frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{p}{q}$$

schneiden, wo die Zahlen p und q, deren Verhältnis ja nur wesentlich ist, bestimmte endliche irrationale oder teilerfremde ganze Zahlen sind.

Natürlich werden wir diesen Satz später erst dann benutzen können, wenn er bewiesen ist. Dieser Satz entspricht der bekannten analogen Tatsache, daß für die Punkte der einzelnen Strahlen durch Q bzw. P die Bedingung

$$x = \frac{\xi_1}{\xi_3} = \text{const.}$$

bzw.

$$y = \frac{\xi_2}{\xi_3} = \text{const.} \quad \text{gilt.}$$

8. Dementsprechend ordnen wir nunmehr jedem Punkt W der Geraden PQ die homogenen Koordinaten

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = p : q : 0$$

zu, wo $p : q$ das zu der Geraden AW gehörende Verhältnis ist.

Abschließend können wir jetzt folgendes Resultat aussprechen:

9. Die Punkte der projektiven Ebene sind eineindeutig und stetig den Verhältnissen der Tripel homogener (positiver oder negativer) Koordinatenzahlen ξ_1, ξ_2, ξ_3 zugeordnet, d. h.:

Jedem Punkte entsprechen eindeutig bestimmte Zahlenverhältnisse $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ und umgekehrt, in der Art, daß „beliebig nahe benachbarte“ Punkte auch „beliebig nahe benachbarte“ Zahlenverhältnisse besitzen.

Die Koordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 pflegt man auch als homogene *Dreieckskoordinaten* oder *projektive Koordinaten* zu bezeichnen und dementsprechend von einem *projektiven Koordinatensystem* zu sprechen. Das projektive Koordinatensystem wird im Grunde *durch zwei mit Abszissen- bzw. Ordinatenzahlen versehene Strahlenbüschel mit den Trägern Q bzw. P* festgelegt, wobei der beiden Büscheln angehörende Strahl PQ die Abszisse $1:0$ und die Ordinate $1:0$ besitzt und dementsprechend die Punkte von PQ dem Satz 7 entsprechend ihre Koordinaten erhalten. Das Strahlenbüschel mit dem Nullpunkt A als Träger tritt also gleichberechtigt neben die beiden anderen. Äußerlich können wir dies dadurch zum Ausdruck bringen, daß wir auch die Zahl $\frac{y}{x} = \nu$ als die dritte nicht-homogene Koordinate eines Punktes P einführen. Insbesondere haben die Eckpunkte A, P, Q des Fundamentaldreiecks, der Einheitspunkt B' und die Punkte U, V der Fig. 52 S. 63 bzw. die Koordinaten der nebenstehenden Tabelle:

A	0,	0,	1
P	1,	0,	0
Q	0,	1,	0
B'	1,	1,	1
U	1,	1,	0
V	1,	—1,	0

Statt ξ_1, ξ_2, ξ_3 werden wir im folgenden einfacher, insbesondere auch, um die Indizes noch für andere Unterscheidungen frei zu behalten, *die Bezeichnung x, y, s* anwenden, und wir werden es dann jedesmal ausdrücklich hervorheben, wenn x, y allein nicht-homogene Koordinaten bezeichnen sollen. Natürlich umfassen die reellen Koordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 alle eigentlichen und evtl. vorhandenen uneigentlichen Punkte der Ebene.

Wir wollen schließlich noch folgende Bemerkung hinzufügen: Nachdem wir gezeigt haben, daß es keine Strecke auf der x-Achse gibt, die frei von dyadisch-rationalen Punkten ist, so können wir den Satz 15 S. 77 mit einem leicht verständlichen Ausdruck der Mengenlehre auch so erweitert aussprechen:

10. Alle dyadisch-rationalen Punkte erfüllen die x-Achse überall dicht, d. h. in jeder beliebigen Nähe jedes *beliebigen* Punktes der x-Achse liegen beiderseits immer beliebig viele dyadisch-rationale Punkte.

Es läßt sich ferner auch leicht zeigen:

11. Auch alle dyadisch-irrationalen Punkte erfüllen die x-Achse überall dicht, ebenso die rationalen Punkte und die irrationalen Punkte.

Es folgt dies alles ja sofort aus dem Satze:

12. Auf jeder von zwei beliebigen Punkten x_1, x_2 begrenzten Strecke der x-Achse liegt stets ein dyadisch-rationaler, ein dyadisch-irrationaler sowie ein rationaler und ein irrationaler Punkt.

Ist z. B. x_3 der zwischen x_1, x_2 gelegene rationale Punkt, so muß auch zwischen x_1, x_3 ein rationaler Punkt x_4 liegen, zwischen x_1, x_4 ein rationaler Punkt x_5 und so fort, d. h. *der beliebige Punkt x_1 ist eine Häufungsstelle der rationalen Punkte.*

Somit folgt also auch der Satz:

13. Jeder beliebige Punkt der x-Achse ist eine Häufungsstelle der dyadisch-rationalen Punkte, der dyadisch-irrationalen sowie der rationalen und irrationalen Punkte.

Und der Satz 16 S. 78 findet seine Erweiterung in dem Satze:

14. Die ganze projektive Ebene $\mathfrak{E}$ ist von den dyadisch-rationalen Punkten überall dicht erfüllt.

Wir haben also nunmehr das projektive Koordinatensystem gewonnen. Werfen wir einmal einen Blick auf die Aufstellung des euklidischen Koordinatensystems in der gewöhnlichen analytischen Geometrie. Da hier die ganze euklidische Schulgeometrie zur Verfügung steht, kann man einfach sagen: Wir wählen zwei aufeinander senkrechte Geraden als x, y-Achsen und ordnen jedem Punkte seine mit Vorzeichen versehenen Abstände von diesen Achsen als x, y-Koordinaten zu. Bei unserem projektiven Koordinatensystem haben wir nun aber den Vorteil, noch keine Kongruenzaxiome und noch kein Parallelenaxiom benutzt zu haben, so daß wir über deren Einführung noch frei verfügen können. Die Aufstellung des Koordinatensystems der euklidischen analytischen Geometrie können wir vergleichen mit der Anfertigung eines Schrankes mit Hilfe von Hobel, Säge, Hobelbank und allen sonstigen Werkzeugen; bei der Aufstellung unseres projektiven Koordinatensystems dagegen haben wir einen sehr schönen Schrank gemacht, in den wir nun vieles übersichtlich und bequem einordnen können, jedoch gleichsam nur mit einem Taschenmesser.

Vierter Abschnitt.

Die Gleichung der Geraden; Linienkoordinaten.

§ 11. Der Begriff „harmonische Mitte" einer Strecke auf der Abszissenachse und zugehörige Lehrsätze.

Für das somit gewonnene (ξ_1, ξ_2, ξ_3)-Dreieckskoordinatensystem gilt es nun vor allem den wichtigen Satz zu beweisen:

1. Eine beliebige (eigentliche oder uneigentliche) Gerade g wird stets durch die lineare Gleichung dargestellt

$$\omega_1 \cdot \xi_1 + \omega_2 \cdot \xi_2 + \omega_3 \cdot \xi_3 = 0, \qquad (1)$$

wo ω_1, ω_2, ω_3 endliche, nicht sämtlich verschwindende Konstante sind, deren Verhältnis nur wesentlich ist, und umgekehrt stellt auch jede solche lineare Gleichung eine bestimmte Gerade dar.

Falls $\omega_3 \neq 0$ ist, ohne daß $\omega_1 = \omega_2 = 0$ ist, kann man die Gleichung (1) ja auch in die Form überführen

$$ux + vy + 1 = 0, \tag{2}$$

wo
$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = u, \quad \frac{\omega_2}{\omega_3} = v$$

gesetzt ist, und falls $\omega_3 = 0$ ist, in die Form

$$ux + vy = 0. \tag{2b}$$

Ehe wir uns zu dem Beweise des Satzes hinwenden, wollen wir zunächst einen neuen Begriff einführen und einige Sätze an ihn anschließen. Wir wollen diese Betrachtung für die Punkte der x-Achse ausführen; doch gilt alles analog auch für die Punkte der y-Achse. *Der Einfachheit halber wollen wir auch die Punkte der x-Achse und ihre Abszissenzahlen mit denselben Buchstaben bezeichnen.*

Wir stellen nun folgende *Definition* auf:

2. Sind auf der x-Achse a, b, c, ∞ irgend vier harmonische Punkte (wobei also unserer Festsetzung S. 62 gemäß a, b und c, ∞ die beiden sich trennenden Paare sind), so soll der Punkt c die harmonische Mitte derjenigen Strecke ab heißen, die ∞ nicht enthält.

Wir haben bei der Möbiusschen Netzkonstruktion schon oft in speziellen Fällen den Begriff der harmonischen Mitte angetroffen. So ist z. B. auf der x-Achse der Punkt 1 die harmonische Mitte zu $0, 2$, der Punkt 2 die harmonische Mitte zu $1, 3$, der Punkt $\frac{1}{2}$ die harmonische Mitte zu $0, 1$, der Punkt $\frac{3}{4}$ die harmonische Mitte zu $\frac{1}{2}, 1$, und so fort.

Nun gilt zunächst folgender Satz:

3. Sind auf der x-Achse a, b irgend zwei durch die Netzkonstruktion erhaltene Punkte, d. h. sind die Zahlen a, b dyadisch-rational, so gehört ja zu den konstruierten Punkten auch der Punkt $c = \frac{a+b}{2}$. Dieser Punkt ist nun zugleich der zu a, b, ∞ harmonische Punkt, also die harmonische Mitte der Strecke ab.

Zum Beweise setzen wir unter der Annahme $b > a$

$$a = \frac{\alpha}{2^n} = \frac{2\alpha}{2^{n+1}},$$

$$b = \frac{\beta}{2^n} = \frac{2\alpha + 2(\beta - \alpha)}{2^{n+1}} = a + \frac{2(\beta - \alpha)}{2^{n+1}},$$

wo n eine positive ganze Zahl ist und α, β positive oder negative ganze Zahlen, die nicht beide gerade sind, wenn $n \neq 0$ ist.

Es ist dann $\quad c = \frac{a+b}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2^{n+1}} = \frac{2\alpha + (\beta - \alpha)}{2^{n+1}} = a + \frac{\beta - \alpha}{2^{n+1}}$

natürlich auch ein dyadisch-rationaler Punkt der x-Achse.

Um nun leicht zu erkennen, daß die vier Punkte a, b, c, ∞ *harmonisch* sind, wollen wir zunächst beispielsweise annehmen, daß $n = 0$ *und* $a = 0$, *also*

$b = 2c$ ist. Dann beachten wir bei der ursprünglichen Möbiusschen Netzkonstruktion der Fig. 52 S. 63 noch die Punkte b', c' der Ordinatenachse, deren Ordinaten auch gleich b, c sind (Fig. 73). Sind dann b^* und c^* die Schnittpunkte der Geradenpaare Pb', Qb und Pc', Qc, so liegen, wie ein Blick auf die genannte Figur zeigt, die Punkte b^*, c^* auf der Geraden AU, während die Punkte b, b', c^* auf einer durch V gehenden Geraden liegen.

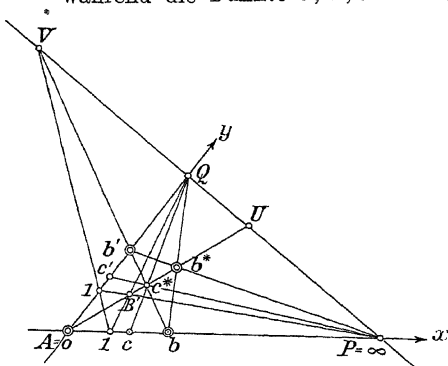
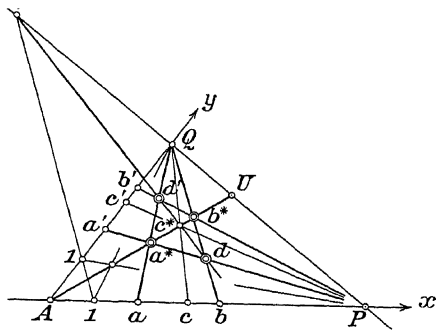



Fig. 73. Fig. 74.

(Denn das gewöhnliche Viereck Abb^*b' ist ja den Abszissen $c = \frac{\beta}{2}$, $b = \beta$ entsprechend in $2\beta \cdot 2\beta$ Teilvierecke zerlegt, wenn die Möbiussche Netzkonstruktion bis zu den Koordinaten mit dem Nenner 2 durchgeführt ist.) Aus der Figur des vollständigen Vierecks $Abb'b^*$ folgt dann also, daß A, b durch c, ∞ harmonisch getrennt sind.

Für *beliebige dyadisch-rationale* Punkte $a, b, c = \frac{a+b}{2}$ liegen aber ganz analoge Verhältnisse vor. Wir nehmen hier noch die Punkte a', b', c' der Ordinatenachse mit den Ordinaten a, b, c hinzu (Fig. 74) und die Schnittpunkte a^*, b^*, c^* und d, d' bzw. der Geradenpaare (Pa', Qa), (Pb', Qb), (Pc', Qc) und (Pa', Qb), (Pb', Qa). Dann liegen die Punkte a^*, b^*, c^* wieder auf der Geraden AU; ferner liegen die Punkte d, d', c^* auf einer durch V gehenden Geraden. (Denn das gewöhnliche Viereck a^*db^*d' ist ja durch die soweit durchgeführte Möbiussche Netzkonstruktion, daß alle Punkte mit Koordinaten, die auf den Nenner 2^{n+1} zu bringen sind, dargestellt werden, in $2(\beta - \alpha) \cdot 2(\beta - \alpha)$ Teilvierecke zerlegt.) Dann aber sind die Punkte a^*, b^*, c^*, U vier harmonische Punkte, also auch die Projektionen a, b, c, ∞ dieser Punkte von Q aus auf die x-Achse.

Wir können nun sogleich den Satz 3 auch auf den Fall erweitern, daß einer der Punkte a, b der x-Achse oder beide *dyadisch-irrational* sind. Der allgemeine Satz lautet dann:

4. Sind auf der x-Achse irgend zwei Punkte a, b gegeben, so hat ihre harmonische Mitte, d. h. der zu a, b, ∞ konstruierte vierte harmonische Punkt stets die Abszisse $c = \frac{a+b}{2}$.

Dem Beweise dieses Satzes wollen wir zunächst folgenden Hilfssatz vorausschicken:

5. Es seien auf einer Strecke AP einer Geraden, etwa der x-Achse, drei aufeinanderfolgende Punkte a_0, a und b gegeben (so daß also a_0 zwischen A, P und a zwischen a_0, P und b zwischen a, P gelegen ist). *Es seien weiter die vierten harmonischen Punkte c_0 und c zu a_0, b, P und a, b, P konstruiert. Es liegt dann stets c zwischen c_0, b* (Fig. 75).

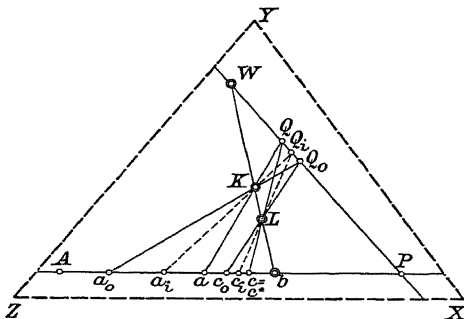



Fig. 75.

Wir können beim Beweise dieses Satzes annehmen, daß die Strecke AP im begrenzten Gebiet gelegen ist. Wir verbinden dann einen beliebigen inneren Punkt Q_0 außerhalb der Geraden AP mit a_0 und P und wählen auf Q_0P einen inneren Punkt W so aus, daß Q_0 zwischen P, W liegt. Es sei nun K der Schnittpunkt von Wb und a_0Q_0; es liegt K zwischen a_0, Q_0 ($\Delta\, a_0Q_0P$ und Wb). Es sei Q der Schnittpunkt von aK und PW; es liegt Q zwischen Q_0, W ($\Delta\, Q_0Pa_0$ und aK, d. h. Q nicht zwischen Q_0, P, und $\Delta\, WPb$ und aK, d. h. Q zwischen W, P. Wir könnten hier auch den allgemeinen Satz benutzen: Sind zwei Scheiteldreiecke, wie Ka_0b und KQ_0W gegeben und ist a ein Punkt zwischen a_0, b, so schneidet die Verbindungslinie aK die Seite Q_0W stets in einem Punkte Q zwischen Q_0, W). Es sei L der Schnittpunkt von Wb und Q_0c_0; es liegt L zwischen K, b ($\Delta\, Kba_0$ und Q_0c_0). Es sei c^* der Schnitt von QL mit der x-Achse; es liegt c^* zwischen c_0, b ($\Delta\, c_0PQ_0$ und QL, d. h. c^* zwischen c_0, P und $\Delta\, bPW$ und bP, d. h. c^* nicht zwischen b, P).

Nun sind die vier Punkte a_0, b, P, c_0 harmonisch, also auch ihre Projektionen K, b, W, L von Q_0 aus auf bW und die Projektionen a, b, P, c^* dieser Punkte von Q aus auf die x-Achse. Folglich fällt c mit dem Punkt c^* zusammen, womit der Satz 5 bewiesen ist.

6. Ist noch a_i ein Punkt zwischen a_0 und a, so liegt der vierte harmonische Punkt c_i zu a_i, b, P zwischen c_0, c.

Denn nach dem Satze 5 muß ja c_i zwischen c_0, b und c zwischen c_i, b liegen.

7. Ist umgekehrt c_i ein Punkt zwischen c_0, c, so liegt der vierte harmonische Punkt a_i zu c, P, b zwischen a_0, a. (Den Punkt a_i erhalten wir ja auch, wenn wir

die Gerade $c_i L$ mit PW im Punkte Q_i schneiden und $Q_i K$ mit AP im Punkte a_i. Denn da K, b, W, L vier harmonische Punkte sind, so sind auch ihre Projektionen a_i, b, P, c_i auf AP von Q_i aus vier harmonische Punkte.) Wir können also auch sagen: *Durchläuft der Punkt a_i die Strecke $a_0 a$ von a_0 bis a, so durchläuft der vierte harmonische Punkt c_i zu a_i, b, P die Strecke $c_0 c$ von c_0 bis c.*

Nun wenden wir uns zu dem Beweise des Satzes 4 hin: *Es sei zunächst der Punkt b dyadisch-rational, aber a dyadisch-irrational,* also

$$a = \lim \pm \left(n + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{4} + \frac{\gamma}{8} + \cdots\right),$$

wo n eine positive ganze Zahl ist und $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ gleich 0 oder 1 sind. Unserer Anschauung zuliebe können wir a und b als positive endliche Zahlen und $b > a$ annehmen, da in den anderen Fällen der Beweis nicht viel anders ist. Ist nämlich etwa a negativ und $b > a$, so können wir ein neues Koordinatensystem eingeführt denken, bei dem der neue Anfangspunkt der Punkt $\bar{A}$ mit den alten Koordinaten $(-\sigma, 0)$ ist, wo $-\sigma$ die zu a nächst kleinere negative *ganze* Zahl ist, das neue Fundamentaldreieck dann durch $\bar{A}PQ$ und der neue Einheitspunkt $\bar{B}'$ durch den Punkt $(-\sigma + 1, +1)$ des alten Koordinatensystems gegeben ist (Fig. 76, für $\sigma = 2$). Dann gilt für die neuen Koordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$ jedes Punktes ersichtlich

Fig. 76.

$$\bar{x} = x + \sigma,$$
$$\bar{y} = y.$$

Die Punkte mit den alten Abszissen a, b haben dann die neuen *positiven* Abszissen $\bar{a} = a + \sigma$, $\bar{b} = b + \sigma$, und gilt dann für den vierten Punkt des Satzes 4 mit der alten Abszisse c die Gleichung

$$\bar{c} = \frac{\bar{a} + \bar{b}}{2} = \frac{a + b}{2} + \sigma,$$

so ist auch $$c = \bar{c} - \sigma = a + b$$

Wir setzen nun $$a_0 = n,$$
$$a_1 = n + \frac{\alpha}{2},$$
$$= n + \quad \frac{[illegible]}{4} \quad \text{usw.}$$

und suchen der Reihe nach die vierten harmonischen Punkte $c_0, c_1, c_2 \ldots$ zu den Punkten $a_0, b, \infty; a_1, b, \infty; a_2, b, \infty, \ldots$, wobei also der Punkt ∞ auch wieder mit P bezeichnet sei. Für diese dyadisch-rationalen Punkte $c_0, c_1, c_2 \ldots$ gilt dann nach dem Satze 3 S. 93

$$c_0 = \frac{a_0 + b}{2},$$

$$c_1 = \frac{a_1 + b}{2},$$

$$c_2 = \frac{a_2 + b}{2},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

wo dann $c_0 \leqq c_1 \leqq c_2 \ldots < b$ ist. Nach dem Satze 5 S. 95 gibt es dann *einen* Punkt c^*, die Häufungsstelle der Punkte c_i, mit der irrationalen Abszisse

$$c^* = \lim c_i = \lim \frac{a_i + b}{2} = \frac{a + b}{2},$$

wobei

$$c_i < c^* < b$$

gilt. Ist andererseits c der vierte harmonische Punkt zu a, b, ∞, d. h. die harmonische Mitte der Strecke ab, so behauptet der Satz 4, daß $c = c^*$ ist. Es muß natürlich auch c zwischen a und b gelegen sein. Würde nun c vom Punkt $c^* = \frac{a + b}{2}$ verschieden sein, so müßte c entweder zwischen a und c^* oder zwischen c^* und b liegen.

Im *ersten* Falle müßte dann aber c zwischen c_0 und c^* gelegen sein, da c zwischen c_0, b nach dem Satze 5 liegen muß. (Fig. 77a, diese wie die folgenden zwei Figuren sind nur schematische Figuren.) Dies ist aber unmöglich; denn es ließe sich ja sonst zwischen c und c^* ein Punkt c_i angeben, dieser Punkt c_i aber müßte nach dem Satze 5, da a_i zwischen a_0 und a liegt, doch zwischen c_0 und c liegen.

Wenn aber *zweitens* c zwischen $c^* = \frac{a + b}{2}$ und b läge (Fig. 77b), so würde für einen Punkt $\bar{c}$ zwischen c^*, c der vierte harmonische Punkt $\bar{a}$ zu $P, \bar{c}, b$ zwischen a_0, a gelegen sein, nach dem Satze 7. Dann aber würde es zwischen $\bar{a}$ und a einen Punkt a_i geben, und der vierte harmonische Punkt c_i zu a_i, b, ∞ müßte nach dem Satze 6 zwischen $\bar{c}, c$ liegen, was auch unmöglich ist. Folglich muß $c = c^*$ sein.

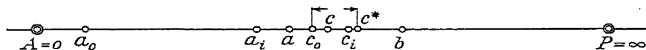
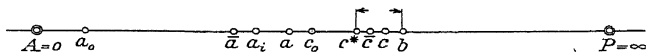



Fig. 77a.

Fig. 77b.

Es seien nun *beide Punkte a, b des Satzes 4 S. 95 dyadisch-irrational.* Wir können uns wieder auf den Fall beschränken, daß $0 < a < b < +\infty$ gilt. Es

sei jetzt $$b = \lim\left(n' + \frac{\alpha'}{2} + \frac{\beta'}{4} + \frac{\gamma'}{8} + \cdots\right),$$

wo n' eine positive ganze Zahl und $\alpha', \beta', \gamma' \ldots$ gleich 0 oder 1 sind. Wir setzen jetzt

$$b_0 = n',$$
$$b_1 = n' + \frac{\alpha'}{2},$$
$$b_2 = n' + \frac{\alpha'}{2} + \frac{\beta'}{4} \quad \text{usw.}$$

und suchen der Reihe nach die vierten harmonischen Punkte $c_0, c_1, c_2 \ldots$ zu den Punkten (a, b_0, ∞), (a, b_1, ∞), $(a, b_2, \infty) \ldots$ (Fig. 78). Für diese dyadisch-irrationalen Punkte c_i gilt dann nach dem vorigen Resultat

$$c_0 = \frac{b_0 + a}{2},$$
$$c_1 = \frac{b_1 + a}{2},$$
$$c_2 = \frac{b_2 + a}{2}, \quad \ldots,$$

wo dann $$c_0 \leqq c_1 \leqq c_2 \ldots < b$$

ist. Ist jetzt wieder c die harmonische Mitte der Strecke ab, so muß wieder

$$c = \lim c_i = \frac{a+b}{2}$$

sein. Der Beweis ist analog wie im vorigen Fall zu führen. Hiermit ist der Satz 4 S. 95 vollständig bewiesen.

$A = 0$ a c c_i b b_i $P = \infty$

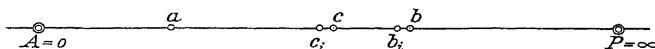



Fig. 78.

Durch den Satz 4 sind im Grunde die Konstruktion des vierten harmonischen Punktes zu den drei beliebig gegebenen Punkten a, b, P einer Geraden mit Hilfe des vollständigen Vierecks einerseits und die Konstruktion des Abszissensystems auf der Geraden mit $P = \infty$ andererseits miteinander verknüpft. Diese Beziehung der beiden Konstruktionen zueinander können wir noch insofern zu verallgemeinern wünschen, daß der Punkt P nicht mehr der Punkt ∞ des Abszissensystems ist. Diese Verallgemeinerung wird sich aus unserer späteren Betrachtung von selbst ergeben.

Dem Satz 4 können wir nun auch noch den folgenden Satz zur Seite stellen:

8. Sind auf der x-Achse irgend zwei Punkte a, c gegeben, so hat der so bestimmte Punkt b, daß c die harmonische Mitte von ab ist, d. h. der vierte harmonische Punkt b zu ∞, c, a, stets die Abszisse $2c - a$.

§ 12. Die Gleichung der Geraden.

Nun wenden wir uns zum Beweise des wichtigen, im vorigen Paragraphen genannten Satzes 1 hin. Die Punkte der (x, y)-Achsen erfüllen ersichtlich die Gleichungen $\xi_2 = 0$ und $\xi_1 = 0$ oder, unhomogen geschrieben, $y = 0$ und $x = 0$, während die Punkte der dritten Seitengeraden PQ des Fundamentaldreiecks APQ der Gleichung $\xi_3 = 0$ genügen, wobei allerdings immer noch nicht die Koordinaten ξ_1, ξ_2 eines beliebigen Punktes W der Geraden PQ festgelegt sind (vgl. Satz 7 S. 90 und Satz 4 S. 101). Die von PQ verschiedenen Geraden durch den Eckpunkt Q bzw. P des Fundamentaldreiecks besitzen ferner die Gleichungen $x = \text{const.}$ bzw. $y = \text{const.}$, wie ein Blick auf die Figur 52 der Möbiusschen Netzkonstruktion S. 63 zeigt.

Fig. 79.

Jedenfalls wollen wir im folgenden annehmen, daß die gegebene Gerade g die Gerade PQ in einem bestimmten von P, Q verschiedenen Punkt S schneidet. Wir betrachten nun zunächst folgende Möglichkeit: Die Gerade g soll durch zwei Punkte T_1, T_2 mit den (unhomogenen) Koordinaten (x_1, y_1), (x_2, y_2) festgelegt sein (Fig. 79). Wir behaupten dann:

1. Die Gerade g wird durch die lineare Gleichung

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

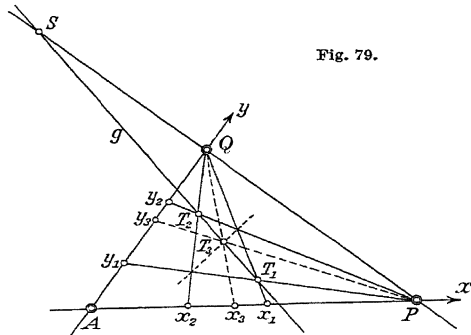
oder

$$\omega_1 \cdot x + \omega_2 \cdot y + \omega_3 = 0, \tag{1'}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= y_1 - y_2, \\ \omega_2 &= x_2 - x_1, \\ \omega_3 &= x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{aligned}\right\} \tag{2a, b, c}$$

ist, dargestellt.

Zum Beweise erkennen wir zunächst: Die Koordinaten der Punkte T_1, T_2 genügen der Gleichung (1). Der vierte harmonische Punkt T_3 zu T_1, T_2, S mit den Koordinaten x_3, y_3 wird von Q bzw. P auf die x- bzw. y-Achse projiziert dem vierten harmonischen Punkt x_3 zu x_1, x_2, ∞ bzw. y_3 zu y_1, y_2, ∞ entsprechen (nach dem Satze 4 S. 53). Demgemäß gilt nach dem Satze 4

S. 95 für die Koordinaten des Punktes T_3

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2} \tag{3a, b}$$

und diese Koordinaten genügen ersichtlich auch der Gleichung (1).

Dieses Resultat können wir aber sogleich durch folgende Sätze sehr verallgemeinern:

2. Ist die Gleichung (1) *für die Koordinaten* (x', y'), (x'', y'') *irgend zweier Punkte* R', R'' *der Geraden* g *erfüllt, so auch für die Koordinaten* (x^*, y^*) *des vierten harmonischen Punktes* R^* *zu* R', R'', S, *wo dann*

$$x^* = \frac{x' + x''}{2}, \quad y^* = \frac{y' + y''}{2} \tag{4a, b}$$

ist (Fig. 79; vgl. Satz 4 S. 95). Und:

3. Ist die Gleichung (1) *für die Koordinaten* (x^*, y^*), (x'', y'') *irgend zweier Punkte* R^*, R'' *der Geraden* g *erfüllt, so auch für die Koordinaten* (x', y') *des vierten harmonischen Punktes* R' *zu* S, R^*, R'', *wo*

$$x' = 2x^* - x'', \quad y' = 2y^* - y'' \tag{5a, b}$$

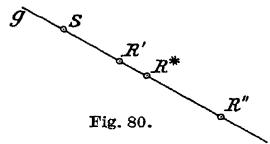
ist (Fig. 80; vgl. Satz 8 S. 98).

Fig. 80.

Wir können ja nun von den drei ursprünglichen Punkten T_1, T_2, S der Geraden g ausgehend immerfort neue vierte harmonische Punkte zu zwei bereits erhaltenen und S oder zu S und zwei bereits erhaltenen konstruieren, am besten ganz in derselben Weise, wie wir bei der Möbiusschen Netzkonstruktion, ausgehend von den Punkten $0, 1, \infty$, immerfort neue vierte harmonische Punkte auf der x-Achse konstruiert und damit alle dyadisch-rationalen Punkte erhalten haben (vgl. §§ 7 und 8); hierbei entsprechen einfach die Punkte T_1, T_2, S den Punkten $0, 1, \infty$ der zum Vergleich herangezogenen Abszissenachse der Netzkonstruktion.

Wir wollen jetzt zunächst den Fall weiter betrachten, daß *die gegebenen Punkte* T_1, T_2 *zwei dyadisch-rationale Punkte sind.* Dann erhalten wir auf der Geraden g überall dicht liegend dyadisch-rationale Punkte, *deren Koordinaten* $(\bar{x}, \bar{y})$ *stets der Gleichung* (1) *genügen.*

Nun ist aber noch zu zeigen, daß dann auch *jeder* andere Punkt R_0 der Geraden g, der also nicht durch eine *endliche* Anzahl von Konstruktionen eines vierten harmonischen Punktes in der angegebenen Weise erhalten ist, doch mit seinen Koordinaten (x_0, y_0) die Gleichung (1) befriedigen muß. Jedenfalls lassen sich dann die Koordinaten (x_0, y_0) durch eine Reihe der konstruierten dyadisch-rationalen Punkte $(\bar{x}, \bar{y})$ beliebig annähern, d. h. wir können setzen

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \bar{x} + \delta, \\ y_0 &= \bar{y} + \varepsilon, \end{aligned}\right\} \tag{6a, b}$$

wo die Zahlen δ, ε absolut beliebig klein werden, je näher der Punkt $(\bar{x}, \bar{y})$ an den Punkt (x_0, y_0) von der einen oder anderen Seite heranrückt. Für die Koordinaten

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= x_0 - \delta, \\ \bar{y} &= y_0 - \varepsilon \end{aligned}\right\} \tag{7a, b}$$

gilt nun nach der Gleichung (1′)

$$\omega_1 \cdot \bar{x} + \omega_2 \cdot \bar{y} + \omega_3 = 0$$

oder

$$\omega_1 \cdot x_0 + \omega_2 \cdot y_0 + \omega_3 = \omega_1 \cdot \delta + \omega_2 \cdot \varepsilon. \tag{8}$$

Da die linke Seite dieser Gleichung eine *bestimmte* Zahl ist, die rechte Seite aber absolut beliebig klein gemacht werden könnte, wenn sie nicht schon gleich 0 wäre, so müssen notwendig die beiden Seiten der Gleichung (8) gleich 0 sein. Hierbei ist der bekannte Satz der Analysis benutzt:

Eine bestimmte Zahl, die absolut kleiner ist als eine beliebig kleine positive Zahl, ist notwendig gleich 0.

Hiermit ist also bewiesen, daß die Gleichung (1) für *alle* Punkte der Geraden g erfüllt ist, wenn T_1, T_2 zwei dyadisch-rationale Punkte sind. Der Beweis für den Fall, daß *wenigstens einer der Punkte* T_1, T_2 *dyadisch-irrational* ist, ist jedoch, wie wir leicht übersehen, nicht viel anders zu führen. Im Grunde haben wir die Unterscheidung der beiden Fälle auch nur der einfacheren Übersicht zuliebe eingeführt. Hiermit ist nunmehr der Satz 1 S. 92 vollständig bewiesen.

4. *Geht die Gerade g speziell durch den Koordinatenanfangspunkt, so ist ihre Gleichung*

$$\omega_1 x + \omega_2 y = 0 \quad \text{oder} \quad \omega_1 \xi_1 + \omega_2 \xi_2 = 0,$$

denn es muß $\omega_3 = 0$ sein, weil die Gleichung (1′) für $x = y = 0$ befriedigt ist.

Aus dem Satze 1 S. 99 folgt nun auch zugleich der folgende Satz:

5. *Sind zwei beliebige Punkte T_1, T_2 einer Geraden g, welche von PQ verschieden ist, mit den Koordinaten (x_1, y_1), (x_2, y_2) gegeben, so lassen sich stets die Koordinaten (x, y) eines beliebigen Punktes R der Geraden durch die Gleichungen ausdrücken*

$$\left.\begin{aligned} x &= (x_2 - x_1) \cdot d + x_1, \\ y &= (y_2 - y_1) \cdot d + y_1. \end{aligned}\right\} \tag{9a, b}$$

Denn ist durch die eine von diesen beiden Gleichungen die (nun nicht mehr stets dyadisch-rationale) Zahl d bestimmt, so folgt die andere Gleichung unmittelbar aus der Gleichung (1). In den Gleichungen (9a, b) haben wir die analytische Darstellung der Geraden *durch zwei Gleichungen mit dem Parameter d* zu erblicken.

Natürlich gilt nun auch der umgekehrte Satz:

6. Jede lineare Gleichung (1′) *der Koordinaten* (x, y) *sowie auch jedes Paar von Gleichungen der Form*

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha \cdot d + \beta, \\ y &= \gamma \cdot d + \delta, \end{aligned}\right\} \qquad (10\text{a, b})$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *beliebige gegebene Zahlen und* d *ein Parameter ist, wobei nicht* $\alpha = \gamma = 0$ *ist, stellt stets eine Gerade dar.*

Es sei zum Schluß noch folgende Bemerkung hinzugefügt:

7. Es gibt in der projektiven Ebene mit gegebenem Koordinatensystem nur folgende drei Arten von Geraden:

a) Geraden mit überall dicht liegenden dyadisch-rationalen Punkten.

b) Geraden mit nur einem dyadisch-rationalen Punkt.

c) Geraden mit keinem dyadisch-rationalen Punkt.

Wir sehen ja zunächst: Wenn eine Gerade *zwei* dyadisch-rationale Punkte hat, so besitzt sie überall dicht liegende dyadisch-rationale Punkte. Hierbei mag ein Punkt der Geraden PQ, für den ja $\xi_3 = 0$ ist, dyadisch-rational bzw. rational heißen, wenn für ihn $\frac{\xi_1}{\xi_2}$ oder $\frac{\xi_2}{\xi_1}$ dyadisch-rational bzw. rational ist. (Ist $\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{p}{q}$, wo p, q teilerfremde ganze Zahlen sind, so liegen auch auf der durch den Anfangspunkt A gehenden Geraden mit dieser Gleichung überall dicht dyadisch-rationale Punkte, und der zugehörige Schnittpunkt dieser Geraden mit der Geraden PQ hat die Koordinaten $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = p : q : 0$.)

Dann aber brauchen wir nur die folgenden drei Beispiele zu betrachten:

a) $y = 0$, d. h. die x-Achse selbst.

b) $y = \sqrt{2} \cdot x$, d. h. eine Gerade mit dem einzigen dyadisch-rationalen Punkte $x = y = 0$.

c) $y = \sqrt{2} \cdot x + \sqrt{3}$ oder $\sqrt{2} \cdot \xi_1 - \xi_2 + \sqrt{3} \cdot \xi_3 = 0$, d. h. eine Gerade mit keinem dyadisch-rationalen Punkte.

8. Im Satz 7 können wir auch überall das Wort „dyadisch-rational“ durch das Wort „rational“ ersetzen.

Für diesen neuen Satz gelten dieselben Beispiele wie soeben. Für die interessante Tatsache, daß es Geraden gibt, die zwar überall dicht rationale Punkte besitzen, aber doch keinen dyadisch-rationalen Punkt, sei das Beispiel der Geraden angeführt:

$$3x + 5y = \tfrac{1}{7}. \qquad (11)$$

Obwohl also in der projektiven Ebene bei gegebenem Koordinatensystem die dyadisch-rationalen Punkte überall dicht liegen, geht doch die durch die Gleichung (11) dargestellte Gerade durch sie hindurch, ohne einen von ihnen zu treffen.

§ 13. Projektive Konstruktion der rationalen Punkte und das Doppelverhältnis von vier Punkten.

Nun haben wir weiterhin für unsere Betrachtungen sehr ruhiges Fahrwasser; alle Stromschnellen in der Nähe der Quellen sind glücklich überwunden.

Die Tatsache, daß jede Gerade durch eine lineare Gleichung dargestellt wird, gestattet sogleich wichtige Folgerungen daraus zu ziehen. Aus dem Fundamentaldreieck APQ mit dem Einheitspunkt haben wir bisher ja nur die Punkte mit *dyadisch-rationalen* Koordinaten (in den §§ 7 und 8) projektiv zu konstruieren gelernt, d. h. durch eine *endliche* Zahl von zu ziehenden Verbindungslinien und zu bestimmenden Schnittpunkten. Jetzt wollen wir den Nachweis für den Satz führen:

1. Jeder Punkt der x-Achse mit rationaler Abszisse $\frac{p}{q}$ (wo also p, q zueinander teilerfremde ganze Zahlen sind, deren eine auch negativ sein kann) läßt sich aus Punkten mit ganzzahligen Koordinaten projektiv konstruieren.

Es braucht wohl kaum noch einmal hervorgehoben zu werden, daß es hier wie immer ganz einerlei ist, ob die von uns benutzten einzelnen Punkte innere oder äußere Punkte hinsichtlich des begrenzten Gebietes, evtl. also auch uneigentliche Punkte sind; für jeden äußeren Punkt treten ja, wie wir wiederholend hervorheben, als seine Darstellung im begrenzten Gebiet zwei innere Geraden ein, deren Schnittpunkt der Punkt ist.

Wir benutzen nun den Punkt mit den ganzzahligen Koordinaten m, n, wo

$$\begin{aligned} m &= p - q + 1 \neq 1, \\ n &= q - 1 \neq 0 \end{aligned} \qquad \text{(1 a, b)}$$

ist, wenn wir die Fälle $p = q$ und $q = 1$ gleich ausschalten.

Die Verbindungslinie der Punkte $(1, 0)$ und (m, n) hat die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ m & n & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$-n \cdot x + (m - 1) \cdot y + n = 0. \qquad (2)$$

Die Verbindungslinie der Punkte $(m, 0)$ und $(1, 1)$ hat die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ m & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

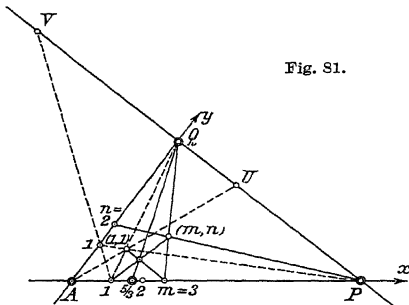
oder

$$-x - (m - 1) \cdot y + m = 0. \qquad (3)$$

Der Schnittpunkt dieser beiden ersichtlich sofort zu ziehenden Geraden hat die Abszisse

$$x = \frac{m+n}{n+1} = \frac{p}{q}. \tag{4}$$

Hieraus ergibt sich die Konstruktion des Punktes $\frac{p}{q}$ auf der x-Achse von selbst. (Im Beispiel der Fig. 81 sei etwa $\frac{p}{q} = \frac{5}{3}$, also $m = 3$, $n = 2$.) Wir können gleich hinzufügen:

Fig. 81.

2. Man kann also analog auch jeden Punkt der projektiven Ebene mit rationalen Koordinaten projektiv konstruieren.

Wir sehen auch: Durch eine *endliche* Anzahl der folgenden projektiven Schritte: Verbinden zweier rationaler Punkte durch eine Gerade, Zumschnittbringen zweier solcher Verbindungslinien ergaben sich stets nur rationale Punkte, d. h. also:

2a. Ein irrationaler Punkt (oder ein Punkt mit wenigstens einer irrationalen Koordinate) kann nicht durch eine endliche Anzahl der genannten projektiven Schritte erreicht werden.

Wir stellen nun weiter folgende *Definition* auf:

3. Unter dem Doppelverhältnis von vier in bestimmter Reihenfolge gegebenen Punkten der x-Achse mit den Zahlen a, b, c, d als Abszissen verstehen wir die Zahl

$$\frac{c-a}{b-c} : \frac{d-a}{b-d}, \tag{5}$$

die wir abkürzend mit dem Symbol $(a\,b\,c\,d)$ *bezeichnen* (Fig. 82). *Diesen Ausdruck nennen wir zugleich auch das Doppelverhältnis der vier Zahlen a, b, c, d.*

Wir heben ausdrücklich hervor, daß es sich hier beim Doppelverhältnis um einen reinen Zahlenausdruck handelt und daß keinerlei Messen von Strecken hineinspielt. Es folgt aus der Definition sogleich:

Fig. 82. (a, c, b, d, x)

3a. Das Doppelverhältnis von den vier Punkten a, b, c, d ist positiv oder negativ, je nachdem die Punktepaare a, b und c, d sich nicht trennen oder sich trennen.

Ferner ergibt sich:

4. Das Doppelverhältnis der vier Punkte $\infty, 0, 1, x$ beträgt $(\infty 0 1 x) = x$.

Hierbei mag zunächst statt $P = \infty$ ein Punkt mit sehr großer (positiver) Abszisse τ gewählt werden. Dann ist

$$(\infty\,0\,1\,x) = \lim_{\tau=\infty} (\tau\,0\,1\,x) = \lim \left[\frac{1-\tau}{0-1} : \frac{x-\tau}{0-x}\right] = x.$$

Hiermit ist also auch eine *neue Deutung der Abszisse* x eines beliebigen Punktes gegeben. Aus dem Satze 4 S. 95 ergibt sich weiter:

5. *Das Doppelverhältnis von vier harmonischen Punkten der x-Achse mit den Zahlen a, b, c, ∞ als Abszissen ist stets gleich* -1. (Denn $(abc\infty)$ ergibt eben für $c = \frac{a+b}{2}$ den Wert -1.) Und umgekehrt:

6. *Ist das Doppelverhältnis von vier Punkten a, b, c, ∞ der x-Achse gleich -1, so sind die vier Punkte harmonisch.* Denn aus der Gleichung $(abc\infty) = -1$ folgt $c = \frac{a+b}{2}$, d. h. c ist die harmonische Mitte der Punkte a, b.

Fig. 83.

Wir wollen nun weiter die Aufgabe lösen:

Die Abszisse d des vierten harmonischen Punktes d zu drei beliebigen mit ihren Abszissen bekannten Punkten a, b, c zu berechnen.

Es sei im folgenden $c \neq 1$ angenommen mit dem Bemerken, daß in der nachstehenden Betrachtung für $c = 1$ einfach der Punkt $(2, 1)$ an Stelle des Punktes $(1, 1)$ zu wählen ist. Die Verbindungslinie der Punkte $(1, 1)$ und $(c, 0)$ (Fig. 83) hat die Gleichung

$$x + (c-1) \cdot y - c = 0.$$

Die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Geraden Qa und Qb oder $x = a$ und $x = b$ sind dann

$$S = \left(a, \ \frac{c-a}{c-1}\right)$$

und

$$T = \left(b, \ \frac{c-b}{c-1}\right).$$

Die Verbindungslinien der Punkte a, T und b, S haben die Gleichungen

$$(c-b) \cdot x + (a-b)(c-1) \cdot y - a(c-b) = 0$$

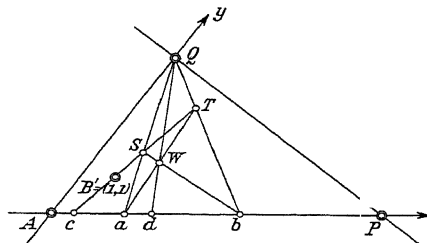
und

$$(c-a) \cdot x - (a-b)(c-1) \cdot y - b(c-a) = 0.$$

Ihr Schnittpunkt W hat die Abszisse

$$x = \frac{ac + bc - 2ab}{2c - a - b}.$$

Nun aber schneidet die Gerade QW die x-Achse nach dem Satze vom vollständigen Viereck in dem vierten harmonischen Punkte d zu a, b, c. Also gilt

$$d = \frac{ac + bc - 2ab}{2c - a - b} \quad \text{d. h.} \tag{6}$$

7. Durch diesen Ausdruck wird stets die Abszisse des vierten harmonischen Punktes d zu den Punkten a, b, c der x-Achse gegeben. (Beispielsweise hat der vierte harmonische Punkt zu $1, 2, 0$ die Abszisse $d = \frac{4}{3}$.)

Hieraus können wir sogleich als Erweiterung des Satzes 5 die Folgerung gewinnen:

8. Je vier harmonische Punkte a, b, c, d der x-Achse haben das Doppelverhältnis -1.

Wir setzen zum Beweise
$$c = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}, \quad \text{wo } \lambda = \frac{c - a}{b - c} \tag{7}$$
und von 0 und ∞ verschieden ist. Dann nimmt der obige Ausdruck (6) für d nach Einsetzen dieses Wertes (7) für c die Form an
$$d = \frac{(a + b)(a + \lambda b) - 2ab(1 + \lambda)}{2(a + \lambda b) - (a + b)(1 + \lambda)} = \frac{a - \lambda b}{1 - \lambda}. \tag{6'}$$
Da dann
$$\frac{c - a}{b - c} = \lambda \quad \text{und} \quad \frac{b - a}{b - d} = -\lambda$$
ist, so wird also der Ausdruck (5) des Doppelverhältnisses $(abcd)$ gleich -1.

Auch gilt die Umkehrung:

9. Je vier Punkte a, b, c, d der *x-Achse mit dem Doppelverhältnis* -1 *sind harmonisch.*

Denn setzen wir
$$\left.\begin{aligned} c &= \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}, \\ d &= \frac{a + \mu b}{1 + \mu}, \end{aligned}\right\} \tag{7'}$$
so folgt
$$(a\,b\,c\,d) = \frac{\lambda}{\mu} = -1,$$
also
$$\mu = -\lambda,$$
d. h.
$$d = \frac{a - \lambda b}{1 - \lambda}. \tag{8}$$
Die rechte Seite geht aber für $\lambda = \frac{c - a}{b - c}$ in den Ausdruck (6) für d über.

Nunmehr können wir sogleich auch den folgenden Satz aussprechen:

10. Sind vier beliebige Punkte a, b, c, d der x-Achse gegeben, so kann man
$$\left.\begin{aligned} c &= \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}, \\ d &= \frac{a + \mu b}{1 + \mu}, \end{aligned}\right\} \tag{9 a, b}$$
setzen, wo
$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{c - a}{b - c} \\ \mu &= \frac{d - a}{b - d} \end{aligned}\right\} \tag{10 a, b}$$
und (the second line above)

ist.

Es ist dann einfach das Doppelverhältnis

$$(a\,b\,c\,d) = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{11}$$

Wir können nun weiter leicht, wie wir jetzt sehen wollen, alle unsere bisherigen, nur für Punkte der x-Achse geltenden Sätze und Definitionen auf eine *beliebige* Gerade g der projektiven Ebene erweitern. Natürlich gilt für die *y-Achse* von vorneherein ganz das Analoge wie für die x-Achse, ebenso wie für *die Abszissen bzw. die Ordinaten jeder anderen durch P oder Q gehenden Geraden $y = \text{const.}$ bzw. $x = \text{const.}$*, da wir ja z. B. unmittelbar die Beziehungen auf der x-Achse auf jede Gerade $y = \text{const.}$ durch Projektion von Q aus übertragen können. Auch wenn es sich um die *Seitengerade PQ* des Fundamentaldreiecks handelt, liegen die Verhältnisse nicht viel anders. Denn wir können ja die Beziehungen der Abszissen x_i für die Punkte auf der Geraden $y = 1$ durch Projektion dieser Geraden von A aus auf die Gerade PQ auf die Koordinaten $\frac{\xi_1}{\xi_2} = x_i$ der Punkte von PQ übertragen (vgl. den Satz 8 S. 90 und den Satz 4 S. 101).

Wir können daher weiter voraussetzen, daß *die Gerade g von den genannten Geraden verschieden ist.* Im übrigen übersehen wir auch leicht, wie die nachfolgenden Betrachtungen sich auf die *besonderen* Lagen der Geraden g übertragen. Wir wollen jetzt zunächst den Satz beweisen:

11. Für vier Punkte R_1, R_2, R_3, R_4 einer beliebigen Geraden g mit den Koordinaten (x_i, y_i) gilt die Doppelverhältnisgleichung

$$(x_1 x_2 x_3 x_4) = (y_1 y_2 y_3 y_4),$$

wobei natürlich diese Doppelverhältnisse der vier Zahlen analog dem Ausdruck (5) *definiert sind* (Fig. 84).

Denn wir können ja

$$x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

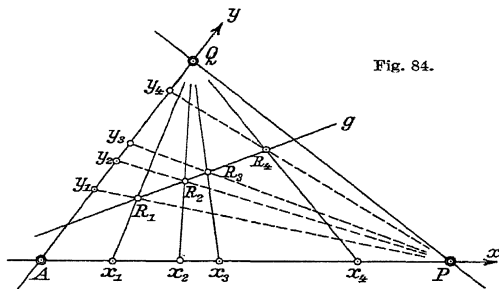
und zugleich $$y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

und ebenso $$x_4 = \frac{x_1 + \mu x_2}{1 + \mu}$$

und zugleich $$y_4 = \frac{y_1 + \mu y_2}{1 + \mu}$$

Fig. 84.

setzen, wo λ, μ bestimmte, von 0 und ∞ verschiedene Zahlen sind. In der Tat genügen ja die Ausdrücke für x_3, y_3 (und ebenso die Ausdrücke für x_4, y_4) der Gleichung der Geraden

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dann aber gilt gemäß dem Satze 10

$$(x_1 x_2 x_3 x_4) = \frac{\lambda}{\mu} = (y_1 y_2 y_3 y_4). \tag{12}$$

Dieser Satz 11 gestattet nun folgende *allgemeine Definition* aufzustellen:

12. Unter dem Doppelverhältnis von vier Punkten R_i einer beliebigen Geraden g soll das Doppelverhältnis der vier Punkte verstanden werden, in welche die Punkte R_i von Q bzw. P aus auf die x-Achse bzw. die y-Achse projiziert werden (Fig. 84), *oder aber, falls die Punkte R_i auf PQ liegen, das Doppelverhältnis der vier Punkte, in welche die Punkte R_i von A aus auf die Gerade $y = 1$ (oder auf die Gerade $x = 1$) projiziert werden* (Fig. 85; $(R_1 R_2 R_3 R_4) = (S_1 S_2 S_3 S_4) = (x_1 x_2 x_3 x_4)$, wobei die Punkte R_i die Koordinaten $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = x_i : 1 : 0$ besitzen).

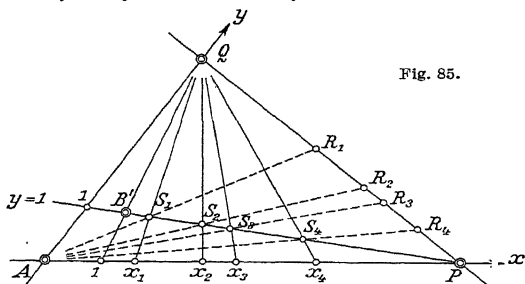



Fig. 85.

Es sei betont, daß dieser Definition noch durchaus *ein bestimmtes Koordinatensystem* zugrunde liegt. Erst später (Satz 10 im § 16) werden wir uns hiervon frei machen. Aus dieser Definition 12 folgt ferner sofort:

13. Für vier harmonische Punkte R_i einer beliebigen Geraden g ist stets das Doppelverhältnis gleich -1.

Wir hatten bei der Definition 3 des Doppelverhältnisses S. 104 ausdrücklich betont, daß es hierbei auf die *Reihenfolge der vier Punkte* ankommt. Wir wollen nun noch überlegen, wie der Wert des Doppelverhältnisses von vier Punkten einer Geraden sich ändert, wenn die Reihenfolge dieser Punkte vertauscht wird. Hierbei können wir uns natürlich auf vier Punkte a, b, c, d der x-Achse beschränken. Es sei also dem Ausdrucke (5) gemäß

$$(a\,b\,c\,d) = \frac{c-a}{b-c} : \frac{d-a}{b-d} = \delta \tag{13}$$

Wir wollen jetzt a, b und c, d als *die beiden Paare* der vier Punkte bezeichnen. Aus der Gleichung (13) folgt nun einfach

$$(a\,b\,c\,d) = (b\,a\,d\,c) = (c\,d\,a\,b) = (d\,c\,b\,a) = \delta,$$

$$(a\,b\,d\,c) = (b\,a\,c\,d) = (d\,c\,a\,b) = (c\,d\,b\,a) = \frac{1}{\delta},$$

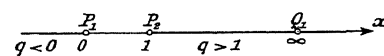
$$(a\,c\,b\,d) = (c\,a\,d\,b) = (b\,d\,a\,c) = (d\,b\,c\,a) = 1 - \delta,$$

$$(a\,c\,d\,b) = (c\,a\,b\,d) = (d\,b\,a\,c) = (b\,d\,c\,a) = \frac{1}{1-\delta},$$

$$(a\,d\,b\,c) = (d\,a\,c\,b) = (b\,c\,a\,d) = (c\,b\,d\,a) = \frac{\delta - 1}{}$$

$$(a\,d\,c\,b) = (d\,a\,b\,c) = (c\,b\,a\,d) = (b\,c\,d\,a) = \frac{}{\delta}$$

Insbesondere gelten also die Sätze:

14. Das Doppelverhältnis von vier Zahlen oder vier Punkten bleibt unverändert, wenn die Elemente jedes Paares oder die beiden Paare vertauscht werden.

15. Das Doppelverhältnis geht in den reziproken Wert über, wenn die Elemente nur eines Paares vertauscht werden.

16. Das Doppelverhältnis δ geht in den Wert $1-\delta$ über, wenn das zweite Element des ersten Paares und das erste Element des zweiten oder das erste Element des ersten Paares und das zweite Element des zweiten Paares vertauscht werden.

17. Vier harmonische Punkte a, b, c, d insbesondere haben bei verschiedener Reihenfolge den letzten Formeln gemäß das Doppelverhältnis $-1, 2$ oder $\frac{1}{2}$ und umgekehrt.

Wir wollen endlich noch den Beweis des folgenden Satzes anschließen, der für unsere spätere Betrachtung von besonderer Bedeutung ist:

*18. Es gibt auf einer Geraden g stets und nur dann ein (reelles) Punktepaar H_1, H_2, das gleichzeitig harmonisch liegt zu den gegebenen Punktepaaren P_1, P_2 und Q_1, Q_2 (wo keine zwei dieser Punkte zusammenfallen sollen), wenn diese letzten Punktepaare sich gegenseitig **nicht** trennen.*

Zum Beweise führen wir auf der Geraden g ein projektives Abszissensystem ein, wobei wir den Punkten P_1, P_2 und Q_1 die Abszissen $0, 1, \infty$ beilegen können (Fig. 86). Bezeichnen wir dann die Abszisse von Q_2 mit q, die Abszissen des gesuchten Punktepaares H_1, H_2 mit x_1, x_2, so sollen die beiden Gleichungen gelten

P_1 P_2 Q_1 x
$q<0$ 0 1 $q>1$ ∞

Fig. 86.

$$(0\,1\,x_1\,x_2) = -1$$

und

$$(\infty\,q\,x_1\,x_2) = -1,$$

oder ausführlich geschrieben

$$\frac{x_1}{1-x_1} : \frac{x_2}{1-x_2} = -1$$

und

$$\frac{1}{q-x_1} : \frac{1}{q-x_2} = -1$$

oder

$$2x_1x_2 - x_1 - x_2 = 0,$$
$$x_1 + x_2 = 2q.$$

Aus diesen Gleichungen folgt dann

$$x_1x_2 = q,$$
$$x_1 + x_2 = 2q$$

oder (bei Berücksichtigung der Vertauschbarkeit von H_1, H_2)

$$x_1 = q + \sqrt{q}\cdot\sqrt{q-1},$$
$$x_2 = q - \sqrt{q}\cdot\sqrt{q-1}.$$

Diese Abszissen sind aber nur dann reell, wenn $q<0$ oder $q>1$ ist. Damit ist der Satz 18 bewiesen.

§ 14. Linienkoordinaten einer Geraden.

Es sei die Gleichung einer beliebigen Geraden g gegeben (vgl. den Satz 1 S. 92)

$$\omega_1 \cdot \xi_1 + \omega_2 \cdot \xi_2 + \omega_3 \cdot \xi_3 = 0 \tag{1}$$

oder auch, wenn wir wieder die Bezeichnung der Koordinaten ξ_i durch x, y, s ersetzen

$$\omega_1 \cdot x + \omega_2 \cdot y + \omega_3 \cdot s = 0. \tag{1'}$$

Wir stellen jetzt weiter folgende Definition auf:

1. Unter den homogenen Linienkoordinaten einer Geraden g verstehen wir die Koeffizienten $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ihrer Gleichung.

Natürlich kommt es wieder nur auf das Verhältnis der drei homogenen Linienkoordinaten ω_i an. Wir heben noch hervor: *Keine der Koordinaten ω_i ist unendlich groß und höchstens zwei von ihnen sind gleich* 0 (vgl. die Festsetzung S. 90). Eigentlich sollte man wohl besser „Geradenkoordinaten" sagen, doch ist dies Wort nicht im Gebrauch. Im Gegensatz zu den Linienkoordinaten einer Geraden werden wir unsere bisherigen Koordinaten ξ_i oder x, y, s oder unhomogen x, y auch als *Punktkoordinaten* bezeichnen.

Die den Punkten A, P, Q des Fundamentaldreiecks gegenüberliegenden Seitengeraden $\xi_3 = 0$ bzw. $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$ haben beispielsweise nach der Definition 1 die Linienkoordinaten $0, 0, 1$; $1, 0, 0$; $0, 1, 0$, und die Gerade mit den Schnittpunkten $x = -1$ bzw. $y = -1$ auf den (x, y)-Achsen hat die Gleichung

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$$

oder

$$x + y + 1 = 0,$$

also die Linienkoordinaten $1, 1, 1$. Diese Gerade nennt man demgemäß auch die *Einheitsgerade* (Fig. 87, vgl. auch die Tabelle S. 91).

Wir können uns leicht auch eine *anschauliche Vorstellung von den Linienkoordinaten ω_i* schaffen: Die Gerade g schneide die drei Seitengeraden des Fundamentaldreiecks, von denen sie verschieden sei, in den Punkten $(x_1, 0, s_1)$, $(0, y_2, s_2)$ und $(x_3, y_3, 0)$ (Fig. 88). Dann ist ersichtlich gemäß der Gleichung (1')

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = -\frac{s_1}{x_1}$$
$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{s_2}{y_2} \tag{2a, b, c}$$
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{y_3}{x_3}$$

Wir führen nun statt der homogenen Linienkoordinaten ω_i auch *nicht-homogene Linienkoordinaten* u, v ein durch die Gleichungen

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_3},$$

$$v = \frac{\omega_2}{\omega_3},$$

falls ω_3 nicht gleich 0 ist, d. h. falls die Gerade g nicht durch den Anfangspunkt A geht, also in den Gleichungen (2a, b, c) $x_1 \neq 0$ und $y_2 \neq 0$ ist. Dann gilt, wenn wir nicht-homogene Punktkoordinaten wählen, auch

$$u = -\frac{1}{x_1}$$

$$v = -\frac{1}{y_2}, \qquad (3\,\text{a, b})$$

d. h.:

2. Die unhomogenen Linienkoordinaten u, v einer beliebigen, doch nicht durch A gehenden Geraden g sind die negativen reziproken Zahlen der Abszisse x_1 und der Ordinate y_2 für die beiden Schnittpunkte auf den x, y-Achsen.

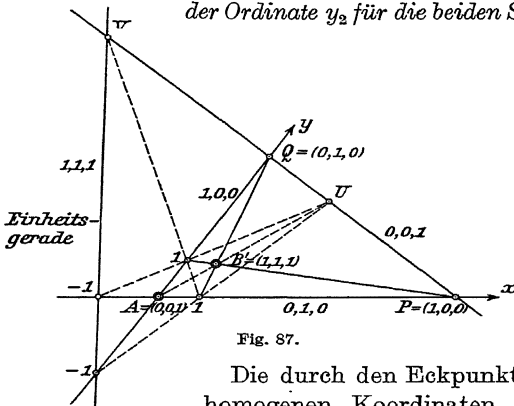
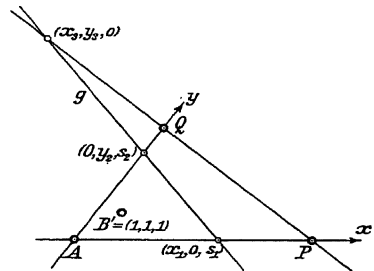



Fig. 87. Fig. 88.

Die durch den Eckpunkt A gehenden Geraden haben die homogenen Koordinaten $\omega_1, \omega_2, \omega_3 = 0$. Darin, daß wir solche Geraden nicht durch die unhomogenen Linienkoordinaten u, v festlegen können, liegt begründet, daß wir der Allgemeinheit unserer Betrachtungen wegen oft den homogenen Linienkoordinaten ω_i den Vorzug geben. Statt der Bezeichnung $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ werden wir öfter lieber *die Bezeichnung* u, v, t für die Linienkoordinaten gebrauchen, um wieder die Indizes noch frei zu haben (vgl. S. 91).

Die Gleichungsform $u \cdot x + v \cdot y + t \cdot s = 0$ ist also jetzt in doppelter Weise zu deuten:

3a. Sind u, v, t als bestimmte Zahlenwerte u_0, v_0, t_0 gegeben, so stellt die lineare Gleichung

$$u_0 \cdot x + v_0 \cdot y + t_0 \cdot s = 0 \qquad (4)$$

die Gleichung derjenigen Geraden in den veränderlichen Punktkoordinaten x, y, s *dar, die auch durch die Linienkoordinaten* u_0, v_0, t_0 *festgelegt ist.*

3b. Sind dagegen x, y, s *als bestimmte Zahlenwerte* x_0, y_0, s_0 *gegeben, so stellt die lineare Gleichung*

$$x_0 \cdot u + y_0 \cdot v + s_0 \cdot t = 0 \tag{5}$$

die Gleichung desjenigen Punktes in veränderlichen Linienkoordinaten u, v, t *dar, der auch durch die Punktkoordinaten* x_0, y_0, s_0 *festgelegt ist.*

Dieser letzte neuartige Satz besagt eben: Der Gleichung (5) genügen unendlich viele Wertetripel $u : v : t$. Jedes einzelne dieser Wertetripel, etwa $u_0 : v_0 : t_0$, stellt aber eine Gerade dar, deren lineare Gleichung dann ja

$$u_0 \cdot x + v_0 \cdot y + t_0 \cdot s = 0$$

ist, und alle diese Geraden gehen eben durch den Punkt (x_0, y_0, s_0).

Die Gleichung $$ux + vy + ts = 0$$

gibt also die „Inzidenz" eines Punktes x, y, s und einer Geraden u, v, t an, d. h. die Bedingung dafür, daß der Punkt auf der Geraden liegt.

Wir können auch sagen:

4. Die Gleichung (4) *stellt eine* ***Punktreihe*** *mit dem Träger* (u_0, v_0, t_0) *dar, d. h. unendlich viele Punkte einer Geraden, die Gleichung* (5) *dagegen ein* ***Strahlenbüschel*** *mit dem Träger* (x_0, y_0, s_0), *d. h. unendlich viele Geraden durch einen Punkt* (vgl. S. 25).

Mit dieser einfachen Betrachtung sind wir dem *Prinzip der Dualität* in der projektiven Geometrie der Ebene bereits wieder etwas näher gerückt (vgl. die Bemerkung S. 56). Doch können wir dieses Prinzip erst später ganz erschließen.

Fünfter Abschnitt.

Koordinatentransformationen in der projektiven Ebene.

§ 15. Koordinatentransformation auf der x-Achse.

Ersichtlich kann man auf einer gegebenen Geraden in verschiedener Weise ein projektives Abszissensystem konstruieren. Blicken wir einmal zu der Möbiusschen Netzkonstruktion in den §§ 7 und 8 zurück. Dort wurde ja aus drei beliebigen Punkten A, B, P der als x-Achse betrachteten Geraden heraus, denen wir die Abszissenwerte $0, 1, \infty$ beilegten, durch nach bestimmter Vorschrift wiederholte Konstruktionen des vierten harmonischen Punktes zu drei schon mit Abszissen versehenen Punkten und dann weiter durch die sich anschließenden Anwendungen des Stetigkeitsaxioms das ganze Abszissensystem gewonnen, d. h. es galt dann der Satz 1 S. 65.

Nun können wir aber für dieselbe Gerade in analoger Weise *ein anderes projektives Abszissensystem* gewinnen, wenn wir nämlich von drei beliebigen anderen Punkten $\bar{A}, \bar{B}, \bar{P}$ ausgehen, denen wir die neuen Abszissen $\bar{x} = \bar{0}, \bar{1}, \bar{\infty}$ zuordnen, wobei wir auch ferner die Zahlenwerte mit einem Strich darüber angeben wollen, wenn sie dem neuen Abszissensystem angehören. Wir stellen jetzt folgenden Satz auf:

1. Es seien auf derselben Geraden, ausgehend von verschiedenen Fundamentalpunkten A, B, P bzw. $\bar{A}, \bar{B}, \bar{P}$ nach der bestimmten Vorschrift der Möbiusschen Netzfigur zwei verschiedene x- und $\bar{x}$-Abszissensysteme konstruiert. Dann besteht zwischen den beiden Abszissen $x, \bar{x}$ jedes Punktes der Geraden die lineare Beziehung

$$\bar{x} = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}. \tag{1}$$

Hierbei erfüllen die endlichen Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, die wir sogleich bestimmen werden und deren Verhältnis ersichtlich nur wesentlich ist, die Bedingung

$$\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \tag{2}$$

Wir können dann von einer *Koordinatentransformation* (1) auf der gegebenen Geraden sprechen, analog wie man in der euklidischen analytischen Geometrie von einer Koordinatentransformation bei Einführung eines neuen Koordinatensystems spricht. Den Beweis des Satzes **1** werden wir nun in *drei* Schritten ausführen:

Fig. 89.

Sind a, b, c die alten Abszissen der neuen Fundamentalpunkte $\bar{A}, \bar{B}, \bar{P}$ (Fig. 89), so wollen wir *erstens* zeigen:

2. Es ist stets e i n d e u t i g *eine Transformation* (1) *bestimmt, welche die Zahlenwerte $x = a, b, c$ bzw. in die Zahlenwerte $\bar{x} = \bar{0}, \bar{1}, \bar{\infty}$ überführt.*

Dies ist also ein rein analytischer Satz. Zur Bestimmung der Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ erhalten wir sogleich die folgenden drei Gleichungen, wenn wir nacheinander die Zahlenpaare $a, \bar{0}$ bzw. $b, \bar{1}$ und $c, \bar{\infty}$ für $x, \bar{x}$ in die Gleichung (1) einsetzen:

$$\alpha \cdot a + \beta = 0,$$
$$\frac{\alpha \cdot b + \beta}{\gamma \cdot b + \delta} = 1,$$
$$\gamma \cdot c + \delta = 0,$$

r

$$\left.\begin{aligned} \frac{\beta}{\alpha} &= -a, \\ \frac{\delta - \beta}{\alpha - \gamma} &= b, \\ \frac{\delta}{\gamma} &= -c. \end{aligned}\right\} \tag{3 a, b, c}$$

Es sind nun die beiden Fälle zu unterscheiden, daß entweder $c = \infty$ oder $c \neq \infty$ ist.

Im Falle $c = \infty$, d. h. für $\overline{P} = P$, ergibt sich nach den Gleichungen (3a, b, c)

$$\gamma = 0,$$
$$\frac{\beta}{\alpha} = -a,$$
$$\frac{\delta}{\alpha} = b - a$$

oder $$\alpha : \beta : \gamma : \delta = 1 : (-a) : 0 : (b - a).$$

Wir setzen jetzt am einfachsten $\delta = 1$. Dann ist

$$\alpha = \frac{1}{b-a},$$
$$\beta = -\frac{a}{b-a}, \qquad (4)$$
$$\gamma = 0,$$
$$\delta = 1$$

und die Transformation (1) lautet

$$\bar{x} = \alpha x + \beta = \frac{x-a}{b-a} \qquad (1')$$

mit der Determinante $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma = \dfrac{1}{b-a} \neq 0.$

Im Falle $c \neq \infty$ können wir, gemäß der Gleichung (3c), $\gamma = 1$ setzen, und es ergibt sich dann durch eine einfache Rechnung:

$$\alpha = b - c$$
$$\beta = -a \quad \frac{b-c}{b-a}, \qquad (5)$$
$$\gamma = 1,$$
$$\delta = -c$$

und somit $$\bar{x} = \frac{b-c}{b-a} \cdot \frac{x-a}{x-c} \qquad (1'')$$

mit der Determinante $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma = \dfrac{(b-c)(c-a)}{a-b} \neq 0.$

Wir haben also das Resultat gewonnen:

2a. Je nachdem $c = \infty$ bzw. $c \neq \infty$ ist, ergibt sich die bestimmte ganze *lineare Transformation* (1′) *bzw. die bestimmte* gebrochene *lineare Transformation* (1″), *wobei*

$$\Delta = \frac{\;}{b-a} \neq 0$$

bzw. $$\Delta = \frac{(b-c)(c-a)}{a-b} \neq 0 \quad \textit{ist.}$$

Wir behaupten jetzt *zweitens* die ebenfalls rein analytische Tatsache:

3. Die bestimmte Transformation (1) (*d. h. die Transformation* (1′) *oder* (1″)) *zwischen den Zahlen* $x, \bar{x}$ *führt je vier Zahlen* x_1, x_2, x_3, x_4 *mit dem nach dem Ausdruck* (5) *S. 104 gebildeten Doppelverhältnis*

$$(x_1 x_2 x_3 x_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} : \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_4}$$

in vier entsprechende Zahlen $\bar{x}_i$ *mit demselben Wert ihres Doppelverhältnisses über.*

Diesen Satz wollen wir auf zwei verschiedene Weisen beweisen. Beide Beweise sollen für spätere Betrachtungen vorbildlich sein.

Erster Beweis: Die Transformation (1) war ja dadurch eindeutig bestimmt, daß die Zahlenwerte $x = a, b, c$ den Zahlenwerten $\bar{x} = \bar{0}, \bar{1}, \bar{\infty}$ entsprechen sollen.

Im Falle $c = \infty$ können wir nun die Transformation (1′) durch die Aufeinanderfolge der folgenden beiden ersetzen:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{}{b - a}, \\ \bar{x} &= x' - \frac{u}{b - a} = x' - a \cdot \Delta. \end{aligned} \tag{6}$$

Wir überzeugen uns dann leicht: Der für irgend vier Zahlenwerte x_i gebildete Wert des Doppelverhältnisses

$$(x_1 x_2 x_3 x_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} : \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_4}$$

ist zunächst gleich dem Wert des Doppelverhältnisses $(x_1' x_2' x_3' x_4')$ der vier entsprechenden Zahlen x_i' und dieser gleich dem Werte des Doppelverhältnisses $(\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4)$ der vier entsprechenden Zahlen $\bar{x}_i$.

Im Falle $c \neq \infty$ aber können wir die Transformation (1″) durch die Aufeinanderfolge der folgenden vier ersetzen:

$$\begin{aligned} x' &= x - c, \\ x'' &= \frac{-}{x'}, \\ & \quad a - c\,' \\ \bar{x} &= \frac{(b - c)(a - c)}{a - b} \cdot x''' = - \Delta \cdot x'''. \end{aligned} \tag{7}$$

Es ist dann wieder leicht zu übersehen, daß

$$\begin{aligned} (x_1 x_2 x_3 x_4) = (x_1' x_2' x_3' x_4') &= (x_1'' x_2'' x_3'' x_4'') \\ &= (x_1''' x_2''' x_3''' x_4''') = (\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4) \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

Zweiter Beweis: Um jetzt zu ausgedehnte Rechnungen zu vermeiden, gehen wir lieber zur homogenen Schreibweise der Transformation (1) über. Wir bezeichnen zunächst die Abszissenzahlen x, $\bar{x}$ jetzt vorübergehend mit X, $\bar{X}$ und führen daneben noch homogene Abszissenzahlen $\frac{x}{s} = X$, $\frac{\bar{x}}{\bar{s}} = \bar{X}$ ein, wobei x, s bzw. $\bar{x}$, $\bar{s}$ ja stets endliche, doch nicht gleichzeitig verschwindende Zahlen und nur die *Verhältnisse* $x : s$, $\bar{x} : \bar{s}$ wesentlich sind. Die Transformation (1) lautet dann:

$$\left.\begin{aligned} \varrho \cdot \bar{x} &= \alpha \cdot x + \beta \cdot s, \\ \varrho \cdot \bar{s} &= \gamma \cdot x + \delta \cdot s, \end{aligned}\right\} \qquad (8\,\text{a, b})$$

wo ϱ ein von 0 und ∞ verschiedener, sonst aber beliebiger Proportionalitätsfaktor ist.

Von den vier gegebenen Zahlenpaaren (x_i, s_i) lassen sich nun die beiden letzten oder doch diesen proportionale, gleichwertige Zahlenpaare, die durch dieselben Buchstaben bezeichnet seien, durch die beiden ersten, wie folgt, ausdrücken:

$$x_3 = x_1 + \lambda' x_2,$$
$$s_3 = s_1 + \lambda' s_2$$

und

$$x_4 = x_1 + \mu' x_2,$$
$$s_4 = s_1 + \mu' s_2.$$

(Eigentlich hätten wir ja zu setzen

$$\varrho' x_3 = x_1 + \lambda' x_2,$$
$$\varrho' s_3 = s_1 + \lambda' s_2.$$

Doch soll eben der Proportionalitätsfaktor ϱ' in die Zahlen x_3, s_3, hineingenommen sein.)

Denn dann ist ja $X_3 = \frac{x_3}{s_3} = \frac{x_1 + \lambda' x_2}{s_1 + \lambda' s_2} = \frac{\frac{x_1}{s_1} + \lambda \frac{x_2}{s_2}}{1 + \lambda} = \frac{X_1 + \lambda X_2}{1 + \lambda}$,

wo die Zahl

$$\lambda = \lambda' \cdot \frac{s_2}{s_1}$$

durch die Zahlen X_1, X_2, X_3 eindeutig bestimmt ist. Es ist ja analog wie früher

$$\lambda = \frac{X_1 - X_3}{X_3 - X_2}$$

oder, wenn wir wieder X_i durch $\frac{x_i}{s_i}$ ersetzen,

$$\lambda = \frac{\frac{x_1}{s_1} - \frac{x_3}{s_3}}{\frac{x_3}{} \quad \frac{x_2}{}}$$

und
$$\lambda' = \frac{s_1}{s_2} \cdot \lambda = \frac{x_1 s_3 - x_3 s_1}{x_3 s_2 - x_2 s_3}.$$

Analog ist
$$X_4 = \frac{x_4}{s_4} = \frac{X_1 + \mu \cdot X_2}{1 + \mu},$$

wo
$$\mu = \mu' \cdot \qquad \text{ist.}$$

Das Doppelverhältnis der vier Zahlen X_i ist aber gleich $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda'}{\mu'}$ (vgl. den Satz 10 S. 106).

Nach den Transformationsformeln (8a, b), in denen wir der Einfachheit halber $\varrho = 1$ annehmen können, entsprechen nun den vier homogenen Zahlenpaaren (x_i, s_i) die folgenden vier homogenen Zahlenpaare:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \alpha x_1 + \beta s_1, \\ \bar{s}_1 = \gamma x_1 + \delta s_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = \alpha x_2 + \beta s_2, \\ \bar{s}_2 = \gamma x_2 + \delta s_2; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_3 &= \alpha x_3 + \beta s_3 = \alpha (x_1 + \lambda' x_2) + \beta (s_1 + \lambda' s_2) \\ &= (\alpha x_1 + \beta s_1) + \lambda' (\alpha x_2 + \beta s_2) = \bar{x}_1 + \lambda' \bar{x}_2, \\ \bar{s}_3 &= \gamma x_3 + \delta s_3 = \bar{s}_1 + \lambda' \bar{s}_2; \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \bar{x}_4 = \bar{x}_1 + \mu' \bar{x}_2, \\ \bar{s}_4 = \bar{s}_1 + \mu' \bar{s}_2 \end{cases}$$

und die folgenden unhomogenen Zahlen:

$$\overline{X}_1 = \frac{\bar{x}_1}{\bar{s}_1},$$

$$\overline{X}_2 = \frac{\bar{x}_2}{\bar{s}_2},$$

$$\overline{X}_3 = \frac{\bar{x}_3}{\bar{s}_3} = \frac{\overline{X}_1 + \bar{\lambda} \cdot \overline{X}_2}{1 + \bar{\lambda}}$$

$$\overline{X}_4 = \frac{\bar{x}_4}{\bar{s}_4} = \frac{\overline{X}_1 + \bar{\mu} \cdot \overline{X}_2}{1 + \bar{\mu}}$$

wo
$$\bar{\lambda} = \lambda' \cdot \frac{\bar{s}_2}{\bar{s}_1},$$

$$\bar{\mu} = \mu' \cdot \frac{\bar{s}_2}{\bar{s}_1} \quad \text{ist.}$$

Das Doppelverhältnis dieser vier Zahlen $\overline{X}_i$ ist aber auch gleich $\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}} = \frac{\lambda'}{\mu'}$.

Folglich ist das Doppelverhältnis der vier Zahlen X_i gleich dem Doppelverhältnis der vier entsprechenden Zahlen $\overline{X}_i$. —

Der Satz 3 enthält sogleich auch die Folgerung:

4. Die bestimmte Transformation (1) *zwischen den Zahlen x, $\bar{x}$ führt je vier „harmonische Zahlen" x_i, d. h. je vier Zahlen mit dem Doppelverhältnis* -1 *bei bestimmter Reihenfolge* (vgl. den Satz 17 S. 109), *wieder in vier harmonische Zahlen $\bar{x}_i$ über.*

Wir wenden uns nun *drittens* zunächst zur *geometrischen* Bedeutung der Transformationsformel (1) zurück. Der Satz 4 besagt ja nun geometrisch im Hinblick auf die Sätze 8 und 9, S. 106:

5. Gilt die Transformationsformel (1) *für die Koordinaten x, $\bar{x}$ irgend dreier Punkte, also für die Koordinatenpaare x_1, $\bar{x}_1$; x_2, $\bar{x}_2$* und *x_3, $\bar{x}_3$, so gilt sie auch für die Koordinatenpaare x_4, $\bar{x}_4$ des vierten harmonischen Punktes zu den drei Punkten.*

Nun konstruieren wir ja, entsprechend der Möbiusschen Netzkonstruktion, ausgehend von den drei Fundamentalpunkten mit den neuen Abszissen $\bar{0}, \bar{1}, \bar{\infty}$, sukzessive immer den vierten harmonischen Punkt zu drei bereits bestimmten. Ferner gilt für die alte und neue Abszisse jedes der Fundamentalpunkte mit den neuen Abszissen $\bar{0}, \bar{1}, \bar{\infty}$ und den alten Abszissen a, b, c die Transformationsformel (1). Folglich gilt diese auch für die alte und neue Abszisse jedes dyadisch-rationalen Punktes im $\bar{x}$-System und damit dem Stetigkeitsaxiom und seinen Folgerungen entsprechend für die alte und neue Abszisse *jedes* Punktes der Geraden g (vgl. den Beweis S. 100; jede dyadisch-irrationale Zahl läßt sich ja beliebig nahe durch dyadisch-rationale Zahlen annähern). Somit ist der Satz 1 S. 113 bewiesen.

Natürlich gilt nun auch die Umkehrung dieses Satzes:

6. Jede lineare Transformation (1) *mit der Bedingung $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ führt das projektive x-Abszissensystem einer Geraden g in ein neues projektives $\bar{x}$-Abszissensystem über, wobei den neuen Abszissen $\bar{x} = \bar{0}, \bar{1}, \bar{\infty}$ bzw. die alten Abszissen $x = a, b, c$ entsprechen, die durch die Gleichungen* (3a, b, c) *bestimmt sind.*

6a. Es besteht eben eine eineindeutige Zuordnung der ∞^3 Transformationen (1) *und der Einführung eines neuen Abszissensystems auf der x-Achse.*

Auf Grund des Satzes 3 der Analysis gilt nun auch der geometrische Satz:

7. Je vier Punkte der Geraden g haben in zwei verschiedenen projektiven Abszissensystemen x, $\bar{x}$ stets denselben Wert des Doppelverhältnisses ihrer Abszissen. Mit anderen Worten: *Das Doppelverhältnis ist eine Invariante der linearen Transformation* (1) *der Abszissen,* oder:

Das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden ist unabhängig von dem auf der Geraden eingeführten Abszissensystem, ist also als eine rein projektiv-geometrische Größe anzusprechen.

Wenn wir uns jetzt noch einmal die Formel (1″) S. 114 ansehen, so erkennen wir:

8. Auf den beiden Seiten der Formel (1″) *steht das Doppelverhältnis der Punkte* c, a, b, x *bzw.* $\bar{\infty}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{x}$. Diese Formel (1″) können wir auch schreiben

$$(\bar{\infty}\,\bar{0}\,\bar{1}\,\bar{x}) = (c\,a\,b\,x)$$

(vgl. den Satz 4 S. 104). Analoges gilt natürlich auch für die Formel (1′), die aus der Formel (1″) für $c = \infty$ hervorgeht.

Noch eine letzte Bemerkung wollen wir hinzufügen: *Statt der Punktreihe* auf der Geraden g können wir auch *das Strahlenbüschel,* das diese Punkte von einem außerhalb gelegenen Punkte, dem Träger des Strahlenbüschels, projiziert, betrachten. Wir können dann jedem Strahl als Koordinate die zugehörige Abszisse x oder $\bar{x}$ zuordnen. Dann übertragen sich alle unsere Betrachtungen dual auf das Strahlenbüschel, wie wir jedoch im einzelnen nicht weiter ausführen wollen.[1])

§ 16. Koordinatentransformationen in der Ebene.

Wir wenden uns nun zur projektiven Koordinatentransformation der ganzen Ebene hin. Es seien in der projektiven Ebene zwei verschiedene (x, y, s)- und $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$-Koordinatensysteme aufgestellt, die sich auf zwei verschiedene Fundamentaldreiecke APQ und $\bar{A}\bar{P}\bar{Q}$ mit den zugehörigen Einheitspunkten, die wir jetzt mit E bzw. $\bar{E}$ bezeichnen wollen, nach der Möbiusschen Netzkonstruktion aufbauen (Fig. 90). Wir behaupten nun:

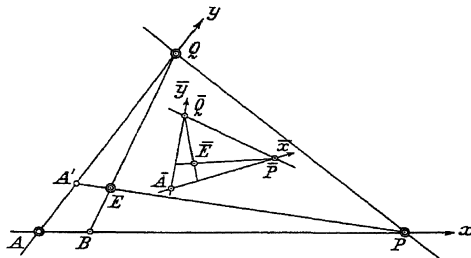



Fig. 90.

1. Zwischen den alten und den neuen projektiven Koordinaten jedes Punktes bestehen die linearen Transformationsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varrho\cdot\bar{x} &= \alpha x + \beta y + \gamma s,\\ \varrho\cdot\bar{y} &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' s,\\ \varrho\cdot\bar{s} &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' s. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Hierbei erfüllen die bestimmten konstanten Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, *deren Verhältnis nur wesentlich ist, die Bedingung*

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2}$$

1) Man vgl. hier die interessante Darstellung von F. Klein, Math. Ann. Bd. 37, 1890, S. 565ff. Ges. math. Abh., Bd. I, S. 375ff.

und ϱ ist ein (von 0 und ∞ verschiedener) Proportionalitätsfaktor, den wir gelegentlich auch gleich 1 setzen können.

Der Proportionalitätsfaktor ϱ bringt eben zum Ausdruck, daß für gegebene Werte x, y, s natürlich nur das *Verhältnis* der Koordinaten $\bar{x}, \bar{y}, \bar{s}$ bestimmt ist, auf das es ja allein ankommt.

Für unhomogene Koordinaten (x, y) und $(\bar{x}, \bar{y})$ lauten die den Gleichungen (1) entsprechenden Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{\alpha'' x + \beta'' y + \gamma''}, \\ \bar{y} &= \frac{\alpha' x + \beta' y + \gamma'}{\alpha'' x + \beta'' y + \gamma''}. \end{aligned} \tag{1'}$$

Doch ist es bequemer, mit den homogenen Koordinaten und den homogenen Gleichungen (1) die Betrachtung durchzuführen.

Die Gleichungen (1) oder (1') stellen ja eine *Transformation der projektiven Koordinaten* vor, ganz vergleichbar dem Übergang von einem rechtwinkligen Koordinatensystem zu einem anderen in der euklidischen oder kartesischen analytischen Geometrie. Eine solche Koordinatentransformation wird oft erwünscht sein, um das Koordinatensystem im Laufe einer Untersuchung möglichst an eine dieser zugrunde liegenden Figur anpassen zu können.

	x_i	y_i	s_i
P	1	0	0
Q	0	1	0
A	0	0	1
E	1	1	1

Den Beweis des Satzes 1 werden wir wieder in *drei* Schritten ausführen, analog wie bei dem Beweise des Satzes 1 S 113.

Wir werden *erstens* den Satz nachweisen:

2. Es gibt stets und nur eine Transformation (1), *welche die durch die nebenstehende Tabelle gegebenen alten Koordinaten der Punkte P, Q, A, E in die neuen Koordinaten $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{s}_i$ dieser Punkte überführt.*

Zur *Bestimmung der Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$* ergeben die entsprechenden Koordinaten $1, 0, 0$ und $\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{s}_1$ von P die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varrho_1 \cdot \bar{x}_1 &= \alpha, \\ \varrho_1 \cdot \bar{y}_1 &= \alpha', \\ \varrho_1 \cdot \bar{s}_1 &= \alpha'', \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

wobei auch der Proportionalitätsfaktor ϱ_1 noch sogleich zu bestimmen bleibt. Analog ergeben sich für die Koordinaten $0, 1, 0$ und $\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{s}_2$ des Punktes Q die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varrho_2 \cdot \bar{x}_2 &= \beta, \\ \varrho_3 \cdot \bar{y}_2 &= \beta', \\ \varrho_2 \cdot \bar{s}_2 &= \beta'', \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

und für die Koordinaten $0, 0, 1$ und $\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{s}_3$ des Punktes A die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varrho_3 \cdot \bar{x}_3 &= \gamma, \\ \varrho_3 \cdot \bar{y}_3 &= \gamma', \\ \varrho_3 \cdot \bar{s}_3 &= \gamma''. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Also können wir die Gleichungen (1) zunächst in die neue Form überführen:

$$\left.\begin{aligned} \varrho \cdot \bar{x} &= \varrho_1 \bar{x}_1 \cdot x + \varrho_2 \bar{x}_2 \cdot y + \varrho_3 \bar{x}_3 \cdot s, \\ \varrho \cdot \bar{y} &= \varrho_1 \bar{y}_1 \cdot x + \varrho_2 \bar{y}_2 \cdot y + \varrho_3 \bar{y}_3 \cdot s, \\ \varrho \cdot \bar{s} &= \varrho_1 \bar{s}_1 \cdot x + \varrho_2 \bar{s}_2 \cdot y + \varrho_3 \bar{s}_3 \cdot s. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Nun ergeben sich noch für die Koordinaten $1, 1, 1$ und $\bar{x}_4, \bar{y}_4, \bar{s}_4$ des Punktes E die Gleichungen

$$\begin{aligned} -\varrho_4 \cdot \bar{x}_4 &= \varrho_1 \bar{x}_1 + \varrho_2 \bar{x}_2 + \varrho_3 \bar{x}_3, \\ -\varrho_4 \cdot \bar{y}_4 &= \varrho_1 \bar{y}_1 + \varrho_2 \bar{y}_2 + \varrho_3 \bar{y}_3, \\ -\varrho_4 \cdot \bar{s}_4 &= \varrho_1 \bar{s}_1 + \varrho_2 \bar{s}_2 + \varrho_3 \bar{s}_3. \end{aligned}$$

Hier haben wir den Proportionalitätsfaktor der linken Seite mit $-\varrho_4$ bezeichnet, damit wir diese Gleichungen auch in der einfachen Form schreiben können

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^4 \varrho_i \cdot \bar{x}_i &= 0, \\ \sum_1^4 \varrho_i \cdot \bar{y}_i &= 0, \\ \sum^4 \varrho_i \cdot \bar{s}_i &= 0. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Nun ist aber die dreigliedrige Determinante

$$\begin{vmatrix} \bar{x}_i & \bar{x}_k & \bar{x}_l \\ \bar{y}_i & \bar{y}_k & \bar{y}_l \\ \bar{s}_i & \bar{s}_k & \bar{s}_l \end{vmatrix} \neq 0$$

für jedes Tripel i, k, l der Indizes $1, 2, 3, 4$. Denn das Verschwinden einer solchen Determinante würde ja bedeuten, daß die zugehörigen drei Punkte unter den Punkten P, Q, A, E auf derselben Geraden lägen, was natürlich ausgeschlossen ist. Wir können kurz sagen:

Keine Determinante der Matrix $\begin{matrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_3 & \bar{x}_4 \\ \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \bar{y}_3 & \bar{y}_4 \\ \bar{s}_1 & \bar{s}_2 & \bar{s}_3 & \bar{s}_4 \end{matrix}$ *verschwindet.*

Aus den Gleichungen (7) folgt dann nach der allgemeinen Theorie der homogenen linearen Gleichungen

$$\varrho_1 : \varrho_2 : \varrho_3 : \varrho_4 = |\,2\;3\;4\,| : |\,3\;4\;1\,| : |\,4\;1\;2\,| : |\,1\;2\;3\,|,$$

wo z. B. $|2\,3\,4|$ die Determinante $\begin{vmatrix} \bar{x}_2 & \bar{x}_3 & \bar{x}_4 \\ \bar{y}_2 & \bar{y}_3 & \bar{y}_4 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_3 & \bar{z}_4 \end{vmatrix}$

bezeichnen soll. Wir können dann auch setzen

$$\left.\begin{aligned} \varrho_1 &= |\,2\;3\;4\,|, \\ \varrho_2 &= |\,3\;4\;1\,|, \\ \varrho_3 &= |\,4\;1\;2\,|, \\ \varrho_4 &= |\,1\;2\;3\,|. \end{aligned}\right\}$$

Damit bekommen dann auch die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, deren Verhältnis nur wesentlich ist, nach den Gleichungen (3), (4) und (5) *bestimmte* Werte. Setzen wir die Werte für $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ nun in die Gleichungen (6) ein, so *sind damit die Transformationsformeln* (1) *vollständig bestimmt und für die Determinante* Δ *der Koeffizienten gilt auch, was die Bedingung* (2) *fordert, nämlich*

$$\Delta = \varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \varrho_3 \cdot \begin{vmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_3 \\ \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \bar{y}_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} = \varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \varrho_3 \cdot \varrho_4 \neq 0 \tag{9}$$

Im Grunde hat es sich hier um die Auflösung von 12 homogenen linearen Gleichungen mit 13 Unbekannten $\alpha, \beta, \ldots, \varrho_i$ gehandelt. —

Um den *zweiten* Schritt unseres Beweises vorzubereiten, wollen wir zunächst in betreff der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

der Transformation *an einige Sätze der Determinantentheorie erinnern*, die im folgenden sogleich ihre Anwendung finden.[1]) Die zu den einzelnen Elementen gehörenden Unterdeterminanten, die *Adjunkten*, wollen wir bzw. mit

$$\begin{matrix} A, & B, & \Gamma \\ A', & B', & \Gamma' \\ A'', & B'', & \Gamma'' \end{matrix}$$

bezeichnen; es ist z. B. $\quad B = \begin{vmatrix} \gamma' & \alpha' \\ \gamma'' & \alpha'' \end{vmatrix}$

1) Es sei z. B. verwiesen auf das Buch: H. v. Mangoldt, Einführung in die höhere Mathematik, Leipzig, 3. Aufl., 1921, 4. Abschnitt, insbesondere S. 79 und 120; oder auf Heffter-Koehler, Lehrbuch der analytischen Geometrie I, 2. Aufl., Karlsruhe 1927, Anhang, S. 456ff.; oder auf das Spezialwerk: H. Dölp, Die Determinanten nebst Anwendung auf die Lösung algebraischer und analytisch-geometrischer Aufgaben, 8. Aufl., 1913.

Es gilt dann auch die Formel

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A & B & \Gamma \\ A' & B' & \Gamma' \\ A'' & B'' & \Gamma'' \end{vmatrix} = \Delta^2,$$

und für die Unterdeterminanten der einzelnen Elemente dieser Determinante Δ' gilt z. B.

$$\begin{vmatrix} B' & \Gamma' \\ B'' & \Gamma'' \end{vmatrix} = \alpha \cdot \Delta.$$

Es seien nun (x', y', s'), (x'', y'', s'') die *alten* und $(\bar{x}', \bar{y}', \bar{s}')$, $(\bar{x}'', \bar{y}'', \bar{s}'')$ die *neuen* Koordinaten zweier beliebiger Punkte (z. B. der Punkte A und P), *für welche bereits die Gültigkeit der Transformationsformeln* (1) *S. 119 nachgewiesen ist.* Die Gleichung der Verbindungslinie der beiden Punkte ist dann ja im *alten* Koordinatensystem

$$\begin{vmatrix} x & y & s \\ x' & y' & s' \\ x'' & y'' & s'' \end{vmatrix} = 0$$

oder $\quad x \cdot (y's'' - s'y'') + y \cdot (s'x'' - x's'') + s \cdot (x'y'' - y'x'') = 0.$

Also sind die homogenen Linienkoordinaten der Geraden

$$\left.\begin{aligned} u &= y's'' - s'y'', \\ v &= s'x'' - x's'', \\ t &= x'y'' - y'x''. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Analog sind im *neuen* Koordinatensystem die Linienkoordinaten derselben Geraden

$$\left.\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{y}'\bar{s}'' - \bar{s}'\bar{y}'', \\ \bar{v} &= \bar{s}'\bar{x}'' - \bar{x}'\bar{s}'', \\ \bar{t} &= \bar{x}'\bar{y}'' - \bar{y}'\bar{x}''. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Aus diesen letzten Gleichungen folgt nun, da nach den Gleichungen (1) z. B.

$$\varrho'\bar{x}' = \alpha x' + \beta y' + \gamma s'$$

und $\quad \varrho''\bar{x}'' = \alpha x'' + \beta y'' + \gamma s'' \quad$ ist,

$$\varrho'\varrho'' \cdot \bar{u} = (\alpha'x' + \beta'y' + \gamma's') \cdot (\alpha''x'' + \beta''y'' + \gamma''s'') - (\alpha''x' + \beta''y' + \gamma''s') \cdot (\alpha'x'' + \beta'y'' + \gamma's'')$$

oder $\quad \varrho'\varrho'' \cdot \bar{u} = (\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') \cdot (y's'' - s'y'') + (\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') \cdot (s'x'' - x's'') + (\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'') \cdot (x'y'' - y'x'')$

oder für $\varrho'\varrho'' = \bar{\varrho}$: und analog

$$\left.\begin{aligned} \bar{\varrho} \cdot \bar{u} &= A \cdot u + B \cdot v + \Gamma \cdot t \\ \bar{\varrho} \cdot \bar{v} &= A' \cdot u + B' \cdot v + \Gamma' \cdot t, \\ \bar{\varrho} \cdot \bar{t} &= A'' \cdot u + B'' \cdot v + \Gamma'' \cdot t \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

mit der Determinante $\Delta' = \Delta^2$, d. h.:

3. Gilt für die alten und die neuen Koordinaten zweier Punkte der Ebene die Transformation (1), *so gilt für die alten und die neuen Linienkoordinaten ihrer Verbindungslinie die „adjungierte“ Transformation* (12) *mit der Determinante* $\Delta' = \Delta^2 \neq 0$.

Hieraus folgt aber weiter ganz analog:

4. Gilt für die alten und die neuen Linienkoordinaten zweier Geraden die Transformation (12), *so gilt für die Punktkoordinaten ihres Schnittpunktes die ursprüngliche Transformation* (1).

Man bezeichnet entsprechend den Transformationen (1) und (12) die einander zugehörigen Punkt- und Linienkoordinaten auch wohl als zwei Systeme zueinander *kontragredienter Variablen.*[1]) Man sollte vielleicht besser statt dessen von „adjungierten Variablen“ sprechen. —

Nun aber können wir *drittens* sogleich schließen: Auch die alten und die neuen Koordinaten des Schnittpunktes B der Geraden AP und QE (Fig. 90 S. 119) genügen der Transformation (1), überhaupt die alten und die neuen Koordinaten jedes Punktes, der durch die Möbiussche Netzkonstruktion im alten Koordinatensystem als Schnittpunkt der zwei Verbindungslinien von zwei bereits erhaltenen Punktepaaren sich ergibt, d. h. der dyadisch-rationalen Punkte des alten Koordinatensystems, und dann auch die alten und die neuen Koordinaten der dyadisch-irrationalen Punkte des alten Koordinatensystems. Hiermit ist dann der Satz 1 S. 119 bewiesen, den wir sogleich in erweiterter Form noch einmal kurz, wie folgt, aussprechen:

5. Für die alten und die neuen Punktkoordinaten jedes Punktes gilt die Transformation (1) *und für die alten und die neuen Linienkoordinaten jeder Geraden die adjungierte Transformation* (12).

Dieser Satz 5 enthält als speziellen Fall den Satz 1 S. 119. Denn sind auf der als x- und $\bar{x}$-Achse gewählten Geraden g die alten und die neuen Fundamentalpunkte A, B, P und $\bar{A}, \bar{B}, \bar{P}$ gegeben, so können wir denselben beliebigen Punkt $Q = \bar{Q}$ außerhalb g als dritten Eckpunkt der beiden Fundamentaldreiecke APQ und $\bar{A}\bar{P}\bar{Q}$ hinzuwählen und außerdem als Einheitspunkte E und $\bar{E}$ etwa die Schnittpunkte von BQ und $\bar{B}\bar{Q}$ mit einer beliebigen Geraden durch P (Fig. 91). Dann gilt für die alten

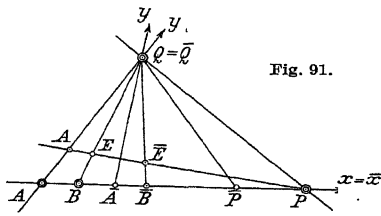



Fig. 91.

1) Vgl. wegen dieser Resultate z. B. Heffter-Koehler, Lehrbuch der analytischen Geometrie, Bd. I, Karlsruhe 1927, S. 58 und 138, sowie von älteren Werken: Clebsch-Lindemann. Vorlesungen über Geometrie, Bd. I, Leipzig 1876, S. 68, und F. Klein, Höhere Geometrie, 3. Aufl., Berlin 1926, S. 234ff.

Koordinaten (x_i, y_i, s_i) und die neuen Koordinaten $(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{s}_i)$ der vier Punkte P, Q, A, E in jedem Fall die nebenstehende Tabelle. Dann aber folgt aus den Gleichungen (3), (4) und (5)

	x_i	y_i	s_i	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	$\bar{s}_i$
P	1	0	0	$\bar{x}_1$	$\bar{0}$	$\bar{s}_1$
Q	0	1	0	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
A	0	0	1	$\bar{x}_3$	$\bar{0}$	$\bar{s}_3$
E	1	1	1	$\bar{x}_4$	$\bar{1}$	$\bar{s}_4$

$$\alpha' = \beta = \beta'' = \gamma' = 0,$$

d. h. die erste und die letzte der Gleichungen (1) lauten

$$\begin{aligned} \varrho \cdot \bar{x} &= \alpha x + \gamma s, \\ \varrho \cdot \bar{s} &= \alpha'' x + \gamma'' s \end{aligned} \tag{1''}$$

oder unhomogen geschrieben $\bar{x} = \dfrac{\alpha x + \gamma}{\alpha'' x + \gamma''}$,

d. h. wir haben, von der Bezeichnung abgesehen, die Gleichung (1) S. 113 erhalten. *Hiermit haben wir noch einen neuen Beweis für den Satz 1 S. 113 gewonnen.*

Wir wollen nun weiter noch die Transformationsgleichungen (1) S. 119 nach den alten Koordinaten x, y, s auflösen. Nach der Theorie der linearen Gleichungen[1]) ergibt sich

$$x = \frac{1}{\Delta} \cdot \varrho \begin{vmatrix} \bar{x} & \beta & \gamma \\ \bar{y} & \beta' & \gamma' \\ \bar{s} & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

oder für $\dfrac{\Delta}{\varrho} = \varrho^*$ und analog

$$\left.\begin{aligned} \varrho^* \cdot x &= A\bar{x} + A'\bar{y} + A''\bar{s} \\ \varrho^* \cdot y &= B\bar{x} + B'\bar{y} + B''\bar{s}, \\ \varrho^* \cdot s &= \Gamma\bar{x} + \Gamma'\bar{y} + \Gamma''\bar{s}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

6. Diese Transformation (13) *vermittelt also den Übergang von den neuen Koordinaten* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$ *zu den alten* (x, y, s).

Wir nennen die Transformation (13) zu der Transformation (12) „*transponiert*", im Hinblick darauf, daß die Zeilen und die Kolonnen der Determinanten beider Transformationen miteinander vertauscht sind.[2])

Wir können daher auch sagen:

7. Der Übergang von den neuen zu den alten Punktkoordinaten wird durch die transponierte Transformation zu derjenigen gegeben, welche den Übergang von den alten zu den neuen Linienkoordinaten vermittelt.

Analog ergibt die Umkehrung der Transformation (12)

$$\begin{aligned} \varrho^{**} \cdot u &= \alpha \cdot \bar{u} + \alpha' \cdot \bar{v} + \alpha'' \cdot \bar{t}, \\ \varrho^{**} \cdot v &= \beta \cdot \bar{u} + \beta' \quad \bar{v} + \beta'' \cdot \bar{t}, \\ \varrho^{**} \cdot t &= \gamma \cdot \bar{u} + \gamma' \quad \bar{v} + \gamma'' \cdot \bar{t}, \end{aligned} \tag{14}$$

d. h.:

1) Vgl. z. B. H. v. Mangoldt, Einführung in die höhere Mathematik I, 3. Aufl., Leipzig 1921, S. 81.

2) Vgl. deswegen Heffter-Koehler I, a. a. O. S. 58, 142 und 457.

8. Der Übergang von den neuen zu den alten Linienkoordinaten wird durch die transponierte Transformation zu derjenigen gegeben, welche den Übergang von den alten zu den neuen Punktkoordinaten vermittelt (vgl. die Transformation (1) S. 119). —

Wir können natürlich nun auch umgekehrt von einer beliebig gegebenen linearen Transformation (1) mit $\Delta \neq 0$ ausgehen. Stets drückt eine solche Transformation den Übergang von dem alten (x, y, s)-Koordinatensystem zu einem neuen $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$-Koordinatensystem aus, wobei das neue Fundamentaldreieck $\bar{A}\bar{P}\bar{Q}$ mit dem neuen Einheitspunkt $\bar{E}$ durch ihre Koordinaten im alten System stets eindeutig festgelegt ist. Da es nur auf das Verhältnis der neun Koeffizienten der Transformation (1) ankommt, so gibt es also ∞^8 verschiedene Transformationen.

9. Es besteht eben eine eineindeutige Zuordnung der Transformationen (1) *und der Lage eines neuen Fundamentaldreiecks $\bar{A}\bar{P}\bar{Q}$ mit dem Einheitspunkt $\bar{E}$ im alten Koordinatensystem* (vgl. Satz 6a, S. 118).

Wir wollen sogleich noch einige Folgerungen unseren Transformationsbetrachtungen anschließen. Wir behaupten nämlich:

10. Das durch den Satz 12 S. 108 definierte Doppelverhältnis von vier Punkten R_i einer beliebigen Geraden g bleibt bei Einführung eines neuen projektiven Koordinatensystems unverändert. Das Doppelverhältnis ist also eine Invariante aller Koordinatentransformationen (1), d. h. es ist eine vom Koordinatensystem völlig unabhängige Zahl, die eine rein projektiv-geometrische Größe darstellt.

Die vier Punkte R_i mögen im *alten* Koordinatensystem (vgl. auch die Fig. 84 S. 107) durch die homogenen Koordinaten (x_i, y_i, s_i) gegeben sein. Dann können wir ja setzen, analog wie früher,

$$x_3 = x_1 + \lambda' x_2,$$
$$y_3 = y_1 + \lambda' y_2,$$
$$s_3 = s_1 + \lambda' s_2$$

und

$$x_4 = x_1 + \mu' x_2,$$
$$y_4 = y_1 + \mu' y_2,$$
$$s_4 = s_1 + \mu' s_2,$$

wo λ', μ' bestimmte von $0, \infty$ verschiedene Zahlen sind. (Wir können ja zunächst setzen

$$\varrho' \cdot x_3 = x_1 + \lambda' x_2,$$
$$\varrho' \cdot y_3 = y_1 + \lambda' y_2,$$

wodurch ϱ' und λ' bestimmt sind. Dann gilt auch $\varrho' s_3 = s_1 + \lambda' s_2$, da ja x_3, y_3, s_3 die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x & y & s \\ x_1 & y_1 & s_1 \\ x_2 & y_2 & s_2 \end{vmatrix} = 0$$

befriedigen. Den Proportionalitätsfaktor ϱ' aber denken wir in die Werte x_3, y_3, s_3 hineingenommen.)

Für die nach der Transformation (1) erhaltenen *neuen* Koordinaten $(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{s}_i)$ gelten aber ersichtlich dieselben Beziehungen

$$\bar{x}_3 = \bar{x}_1 + \lambda' \bar{x}_2 \quad \text{usw.}$$

Denn es ist ja z. B.

$$\begin{aligned} \varrho \cdot \bar{x}_3 &= \alpha x_3 + \beta y_3 + \gamma s_3 \\ &= \alpha (x_1 + \lambda' x_2) + \beta (y_1 + \lambda' y_2) + \gamma (s_1 + \lambda' s_2) \\ &= (\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma s_1) + \lambda' (\alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma s_2) \\ &= \bar{x}_1 + \lambda' \bar{x}_2 . \end{aligned}$$

Nun wird aber in *beiden* Koordinatensystemen nach der Definition 12 S. 108 und der vorhergehenden Betrachtung das Doppelverhältnis der vier Punkte R_i durch $\frac{\lambda'}{\mu'}$ gegeben, womit unser Satz 10 bewiesen ist.

Diesem Satze 10 gemäß können wir aber sofort folgende neue geometrische Anschauung von dem Begriff des Doppelverhältnisses von vier Punkten gewinnen:

11. Vier Punkte R_i einer Geraden g besitzen als Doppelverhältnis die Abszissenzahl x des Punktes R_4, wenn wir, von den Punkten R_1, R_2, R_3 als den Fundamentalpunkten ∞, 0, 1 ausgehend, ein projektives Abszissensystem auf der Geraden g konstruieren (Fig. 92). Denn es ist dann ja

$$(R_1 R_2 R_3 R_4) = (\infty\, 0\, 1\, x) = x .$$

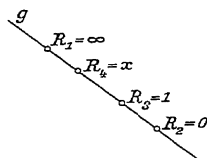
Fig. 92.

Es gilt dann weiter der Satz:

12. Werden vier Strahlen r_i durch denselben Punkt Q von zwei beliebigen Geraden g, g' in den Punktquadrupeln R_i und R_i' geschnitten, so haben letztere dasselbe Doppelverhältnis, d. h. es gilt die Gleichung

$$(R_1 R_2 R_3 R_4) = (R_1' R_2' R_3' R_4') .$$

(Vgl. den speziellen Fall dieses Satzes, den Satz 4 S. 53.)

Wir wollen diesen Satz 12 als den *Satz des Pappus* (Ende des 3. Jahrhunderts n. Chr. in Alexandria) bezeichnen, wenn auch bei diesem Mathematiker der analoge Satz mit Streckenverhältnissen ausgesprochen ist.

Zum Beweise des Satzes 12 wählen wir ein projektives Koordinatensystem so, daß der Punkt Q wie sonst der der x-Achse gegenüberliegende Eckpunkt des Fundamentaldreiecks ist. Dann ist ja

$$(x_1 x_2 x_3 x_4) = (R_1 R_2 R_3 R_4) = (R_1' R_2' R_3' R_4'),$$

Fig. 93.

wo x_i die gemeinsamen Abszissen der Punkte R_i und R_i' sind (Fig. 93).

Jetzt können wir auch noch die folgende allgemeine *Definition* anschließen:

13. Unter dem Doppelverhältnis von vier Strahlen r_i durch denselben Punkt Q verstehen wir das Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte mit irgendeiner Geraden g. Dieses Doppelverhältnis ist dann natürlich auch von dem eingeführten Koordinatensystem unabhängig.

Wenn wir zu der schon wiederholt ausgesprochenen Bemerkung zurückblicken, daß der Begriff „Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden" *rein geometrisch* ist, so tritt dies wohl am besten hervor durch den folgenden projektiven Satz, der sich leicht aus dem Vorstehenden ergibt:

14. Stets dann und nur dann lassen sich die beiden Punktquadrupel A, B, C, D und A_1, B_1, C_1, D_1 der beliebigen Geraden g, g_1 in der projektiven Ebene durch eine Kette von Projektionen ineinander überführen, wenn $(ABCD) = (A_1 B_1 C_1 D_1)$ ist.

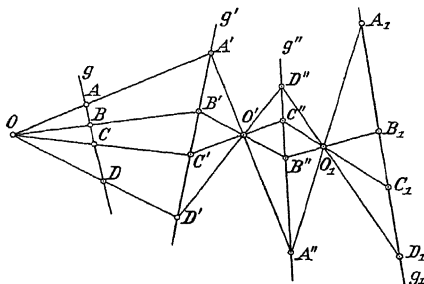



Fig. 94.

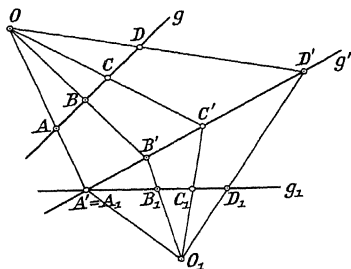



Fig. 95.

Wir sehen zunächst: Es seien vier Punkte A, B, C, D einer Geraden g von einem außerhalb gelegenen Punkt O auf eine zweite Gerade g', dann weiter von einem Punkte O' auf eine dritte Gerade g'' und so fort, endlich von einem Punkte O_1 auf eine Gerade g_1 in die Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 projiziert. Dann gilt nach dem Satze 12 die Gleichung

$$(ABCD) = (A_1 B_1 C_1 D_1)$$

(Fig. 94, *erweiterter Satz des Pappus*). Es gelte aber nun umgekehrt diese Gleichung für je vier Punktquadrupel zweier Geraden g, g_1, die übrigens auch zusammenfallen können. Dann können wir stets schon durch eine Kette von zwei Projektionen die Punkte A, B, C, D in die Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 überführen, wenn g und g_1 verschiedene Geraden sind (Fig. 95), sonst stets durch eine Kette von drei Projektionen.

Sechster Abschnitt.

Projektive Verwandtschaften.

§ 17. Projektive Verwandtschaft oder Kollineation in der Ebene.

Wir knüpfen unsere Betrachtung in formaler Hinsicht an die Transformationsformeln (1) S. 119 an. Diesen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varrho \cdot \bar{x} &= \alpha x + \beta y + \gamma s, \\ \varrho \cdot \bar{y} &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' s, \\ \varrho \cdot \bar{s} &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' s \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

mit gegebenen Koeffizienten und

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2}$$

können wir nun, wie folgt, eine völlig andere geometrische Bedeutung beilegen wie bisher:

Bei dieser neuen Deutung der Formeln (1) *soll jetzt das projektive* (x, y, s)-*Koordinatensystem völlig unverändert bleiben. Es soll aber in ihm der beliebige Punkt* (x, y, s) *durch die Formeln* (1) *dem Punkte* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$ *zugeordnet werden.*

Dem Gleichungssystem (1) tritt sofort das folgende umgekehrte Gleichungssystem zur Seite (vgl. die Gleichungen (13) und den Satz 7 S. 125):

$$\left.\begin{aligned} \varrho^* \cdot x &= A\bar{x} + A'\bar{y} + A''\bar{s}, \\ \varrho^* \cdot y &= B\bar{x} + B'\bar{y} + B''\bar{s}, \\ \varrho^* \cdot s &= \Gamma\bar{x} + \Gamma'\bar{y} + \Gamma''\bar{s} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

mit der Determinante $$\Delta' = \Delta^2. \tag{4}$$

Wir stellen also weiterhin die *Definition* an die Spitze:

1. Eine durch die Gleichung (1) *bestimmte Zuordnung der Punkte in der projektiven Ebene nennen wir eine projektive Verwandtschaft (eine Projektivität) oder eine Kollineation.* Diese letzte Bezeichnung soll gerade den Inhalt des folgenden Satzes 3 zum Ausdruck bringen.

Eine solche Kollineation besitzt eine Reihe wichtiger Eigenschaften:

2. Jedem Punkte mit den Koordinaten x, y, s entspricht ein bestimmter Punkt mit den Koordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{s}$ und umgekehrt.

Wir können den Punkt (x, y, s) als *Originalpunkt,* den Punkt $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$ als *Bildpunkt* bezeichnen. Wir haben demgemäß die projektive Ebene uns gleichsam *doppelt überdeckt* zu denken, einmal als Gesamtheit aller Originalpunkte und dann als Gesamtheit aller Bildpunkte. Die „Originalebene" wird dann auf die „Bildebene" durch die Gleichungen (1) abgebildet. Wir sagen auch, daß hierdurch die beiden sich deckenden Ebenen projektiv verwandt sind.

3. Jeder Geraden g entspricht wieder eine Gerade $\bar{g}$, d. h. je drei Originalpunkten (x, y, s) in gerader Linie entsprechen wieder drei Bildpunkte $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$ in gerader Linie und umgekehrt (Originalgerade g, Bildgerade $\bar{g}$).

Denn sind die drei Punkte R_1, R_2, R_3 einer Originalgeraden g durch die Koordinaten x_i, y_i, s_i gegeben, so gelten ja die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_3 &= x_1 + \lambda' \cdot x_2, \\ y_3 &= y_1 + \lambda' \cdot y_2, \\ s_3 &= s_1 + \lambda' \cdot s_2, \end{aligned}$$

wo λ' ein bestimmter, von 0 und ∞ verschiedener Zahlenwert ist und statt der ursprünglich gegebenen Zahlenwerte x_3, y_3, s_3 ihnen gleichwertige und gleichbezeichnete proportionale Zahlenwerte eingeführt sind (vgl. S. 116 und 126). Es mögen dann nach den Transformationsformeln (1) den Punkten R_1, R_2 die Punkte $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$ mit den Koordinaten $\bar{x}_1$, $\bar{y}_1$, $\bar{s}_1$ und $\bar{x}_2$, $\bar{y}_2$, $\bar{s}_2$ entsprechen, wodurch auch die Verbindungslinie $\bar{g} = \bar{R}_1 \bar{R}_2$ festgelegt ist. Dem Punkte R_3 entspricht dann der Punkt $\bar{R}_3$ mit den Koordinaten

$$\begin{aligned} \bar{x}_3 &= \bar{x}_1 + \lambda' \cdot \bar{x}_2, \\ \bar{y}_3 &= \bar{y}_1 + \lambda' \cdot \bar{y}_2, \\ \bar{s}_3 &= \bar{s}_3 + \lambda' \cdot \bar{s}_2, \end{aligned}$$

d. h. der Punkt $\bar{R}_3$ liegt auf der Geraden $\bar{g}$.

Wir wollen noch folgende deskriptive *Definition* einführen:

4. Eine irgendwie gegebene eineindeutige Transformation oder Verwandtschaft der Punkte zweier zugeordneten Geraden soll s t e t i g heißen, wenn zwei Punktepaare (x, y, s), die sich trennen, wieder zwei Punktepaaren $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$ entsprechen, die sich trennen.

Es möge z. B. durch eine gegebene Kollineation die Verwandtschaft auf zwei zugeordneten Geraden g, $\bar{g}$ bekannt sein, wobei die Punkte M, N von g den Punkten $\bar{M}$, $\bar{N}$ von $\bar{g}$ entsprechen. Dann können wir uns leicht eine neue (natürlich eine nicht-projektive) Verwandtschaft in der Ebene dadurch bilden,

daß jetzt dem Punkte M der Punkt $\overline{N}$ und dem Punkte N der Punkt $\overline{M}$ zugeordnet sein soll, während die Zuordnung der übrigen Punkte nicht geändert wird. Diese neue Verwandtschaft besitzt ersichtlich nicht die Eigenschaft der Stetigkeit, wenn die gegebene Kollineation sie besitzt. (Entsprechen z. B. die Punkte A, B, C den Punkten $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ der Fig. 96, so trennen sich die Punktepaare M, A, B, C, die entsprechenden Punktepaare $\overline{N}, \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ aber nicht.)

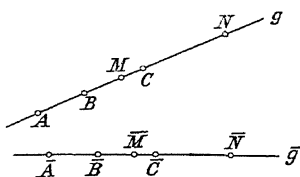



Fig. 96.

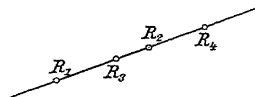



Fig. 97.

Wohl aber gilt der Satz:

5. *Die projektive Verwandtschaft besitzt diese Eigenschaft der Stetigkeit.*

Denn es seien die vier Punkte R_i mit den Koordinaten (x_i, y_i, s_i) gegeben, und es mögen die Punktepaare R_1, R_2 und R_3, R_4 sich trennen (Fig. 97). Wir setzen dann wie soeben

$$x_3 = x_1 + \lambda' \cdot x_2,$$
$$y_3 = y_1 + \lambda' \cdot y_2,$$
$$s_3 = s_1 + \lambda' \cdot s_2$$

und analog

$$x_4 = x_1 + \mu' \cdot x_2,$$
$$y_4 = y_1 + \mu' \cdot y_2,$$
$$s_4 = s_1 + \mu' \cdot s_2.$$

Dann kommt das Getrenntsein der Punktepaare R_1, R_2 und R_3, R_4 ersichtlich dadurch zum Ausdruck, daß die Zahlen λ', μ' verschiedene Vorzeichen besitzen. (Das Doppelverhältnis $(R_1 R_2 R_3 R_4) = \frac{\lambda'}{\mu'}$ der vier Punkte R_i ist negativ; vgl. den Satz 3a S. 104.) Diese Eigenschaft überträgt sich aber analog auf die vier entsprechenden Punkte $\overline{R}_i$ mit den Koordinaten $\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{s}_i$.

Von besonderer Bedeutung ist es nun aber, die Umkehrung unserer Betrachtungen durchzuführen. Diese Umkehrung spricht sich in dem wichtigen *Fundamentalsatz der projektiven Geometrie für die Ebene* aus:

6. *Es sei ein irgendwie erhaltenes Punktentsprechen, eine Verwandtschaft, in der projektiven Ebene gegeben mit den folgenden Eigenschaften:*

Je zwei Punkte der doppelt zu denkenden Ebene sind einander als ein Originalpunkt und als ein Bildpunkt zugeordnet. Bei drei Originalpunkten in einer geraden Linie sollen auch die entsprechenden drei Bildpunkte in gerader Linie liegen.

Ein solches Punktentsprechen ist dann stets eine projektive Verwandtschaft, d. h. es wird durch eine lineare Transformation (1) *zwischen den Koordinaten desselben projektiven Koordinatensystems dargestellt.*[1])

Es sei hervorgehoben, daß die Eigenschaft der *Stetigkeit* für die Verwandtschaft, wie sie nach dem Satze 4 definiert ist, nicht zu den Voraussetzungen des Satzes 6 gehört.

Zum Beweise dieses Satzes 6 wollen wir zunächst die weitere Eigenschaft der gegebenen Verwandtschaft nachweisen:

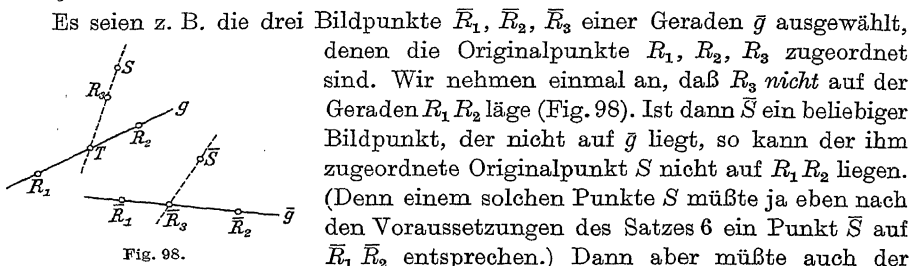
7. *Auch je drei Bildpunkten in gerader Linie entsprechen drei Originalpunkte in gerader Linie.*

Es seien z. B. die drei Bildpunkte $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$, $\bar{R}_3$ einer Geraden $\bar{g}$ ausgewählt, denen die Originalpunkte R_1, R_2, R_3 zugeordnet sind. Wir nehmen einmal an, daß R_3 *nicht* auf der Geraden $R_1 R_2$ läge (Fig. 98). Ist dann $\bar{S}$ ein beliebiger Bildpunkt, der nicht auf $\bar{g}$ liegt, so kann der ihm zugeordnete Originalpunkt S nicht auf $R_1 R_2$ liegen. (Denn einem solchen Punkte S müßte ja eben nach den Voraussetzungen des Satzes 6 ein Punkt $\bar{S}$ auf $\bar{R}_1 \bar{R}_2$ entsprechen.) Dann aber müßte auch der Schnittpunkt T von $R_1 R_2$ und $S R_3$ demselben Punkt $\bar{R}_3$ entsprechen, was den Voraussetzungen des Satzes 6 widerspricht.

Fig. 98.

Ferner gilt auch noch die Eigenschaft:

8. *Je vier harmonischen Originalpunkten entsprechen stets vier harmonische Bildpunkte und umgekehrt.*

Es folgt dies ja einfach daraus, daß je vier harmonische Punkte gemäß der Definition 3 S. 53 durch die Figur eines vollständigen Vierecks miteinander verknüpft sind.

Wir denken nun weiter irgendein projektives (x, y, s)-Koordinatensystem eingeführt mit dem Fundamentaldreieck APQ und dem Einheitspunkt E. In der gegebenen Verwandtschaft müssen dann nach den Voraussetzungen des Satzes 6 den *vier Originalpunkten* P, Q, A, E *vier Bildpunkte* $\bar{P}, \bar{Q}, \bar{A}, \bar{E}$ entsprechen, von denen wieder keine drei in einer Geraden liegen (Fig. 99). Diese Bildpunkte $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $\bar{A}$, $\bar{E}$ mögen die Koordinaten $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$, $\bar{s}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ besitzen. Dann können wir jedenfalls durch ganz analoge Rechnung, wie sie S. 120 durchgeführt ist, eindeutig eine *projektive* Verwandtschaft bestimmen, welche insbesondere die vier Punkte $\bar{P}, \bar{Q}, \bar{A}, \bar{E}$ mit den Koordinaten $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$, $\bar{s}_i$

1) Wegen des Beweises dieses Satzes vgl. man insbesondere: G. Darboux, Math. Ann. Bd. 17, 1888, S. 55, sowie wegen weiterer Literatur die Anm. S. 143.

als Originalpunkte in die vier Punkte P, Q, A, E mit den speziellen Koordinaten der Tabelle S. 120 als Bildpunkte überführt.

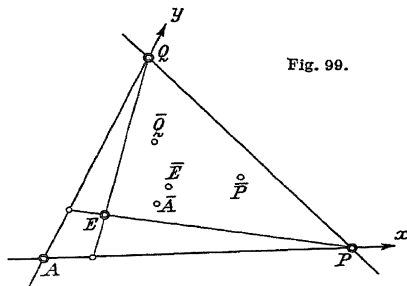
Wir bilden nun die *Aufeinanderfolge der ursprünglich gegebenen Verwandtschaft und dieser projektiven Verwandtschaft* in folgender Weise: Durch die ursprünglich gegebene Verwandtschaft geht in der projektiven Ebene ein beliebiger Punkt $R = (x, y, s)$ als Originalpunkt in den Punkt $\bar{R} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$ als Bildpunkt über, durch die projektive Verwandtschaft wird weiter dieser Punkt $\bar{R} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$ als Originalpunkt in den Punkt $\bar{\bar{R}} = (\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{s}})$ als Bildpunkt übergeführt, d. h.:

Fig. 99.

Durch diese *Aufeinanderfolge der beiden Verwandtschaften ergibt sich dann eine neue Verwandtschaft zwischen den Punkten* (x, y, s) *und* $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{s}})$ *in der projektiven Ebene, und zwar mit denselben Eigenschaften, wie sie die Voraussetzungen des Satzes 6 aussprechen.* Auch bei dieser neuen Verwandtschaft, der „zusammengesetzten Verwandtschaft", können wir die Punkte (x, y, s) als Originalpunkte, die Punkte $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{s}})$ als Bildpunkte benennen. Bei dieser zusammengesetzten Verwandtschaft entsprechen sich jedoch die Punkte P, Q, A, E selbst. Wir werden nun nachweisen, daß diese neue Verwandtschaft notwendig die *Identität* ist, d. h. daß *jeder* Punkt der Ebene sich selbst entspricht. Dann ist natürlich auch gezeigt, daß die ursprünglich gegebene Verwandtschaft die Umkehrung der projektiven Verwandtschaft darstellt, also auch eine projektive Verwandtschaft ist. Und zwar wird die ursprünglich gegebene Verwandtschaft dann durch die Formeln (1) gegeben, wo eben die Punkte $(x, y, s) = (\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{s}})$ und $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$ die Original- und Bildpunkte bedeuten.

Wir haben also zu zeigen, daß die zusammengesetzte Verwandtschaft durch die Gleichungen der Identität

$$\left.\begin{aligned} \bar{\bar{\varrho}} \cdot \bar{\bar{x}} &= x, \\ \bar{\bar{\varrho}} \cdot \bar{\bar{y}} &= y, \\ \bar{\bar{\varrho}} \cdot \bar{\bar{s}} &= s \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

dargestellt wird. Diese Gleichungen sind ja für die Punkte P, Q, A, E erfüllt. Nach den Eigenschaften der zusammengesetzten Verwandtschaft sind notwendig auch alle dyadisch-rationalen Punkte des Koordinatensystems, die ja aus den Punkten P, Q, A, E sich in der uns bekannten Weise durch die Möbiussche Netzkonstruktion ergeben, sich selbst entsprechende Punkte, d. h. die letzten Gleichungen sind auch erfüllt für alle *dyadisch-rationalen* Punkte (ja auf Grund der Ausführungen des § 13 auch für jeden Punkt mit rationalen Koordinaten (x, y, s)).

Ferner gilt auch für die zusammengesetzte Verwandtschaft: *Je vier harmonischen Originalpunkten entsprechen vier harmonische Bildpunkte und umgekehrt.*

Es sei nun $S = (x_0, 0, s_0)$ ein beliebiger *dyadisch-irrationaler* Originalpunkt der x-Achse und $T = (\bar{\bar{x}}_0, 0, \bar{\bar{s}}_0)$ sein entsprechender Bildpunkt bei der zusammengesetzten Verwandtschaft. Wären nun diese beiden Punkte S, T verschieden, so behaupten wir zunächst: *Wir könnten dann stets einen dyadisch-rationalen Punkt R der x-Achse so angeben, daß entweder die Punktepaare A, S und P, R sich trennen, die Punktepaare A, T und P, R aber nicht (Möglichkeit I), oder aber umgekehrt die Punktepaare A, T und P, R sich trennen und die Punktepaare A, S und P, R sich nicht trennen (Möglichkeit II).*

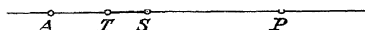
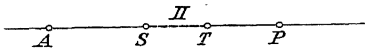
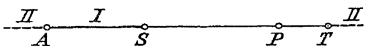



Fig. 100a. Fig. 100b. Fig. 100c.

Zum Beweise dieser Behauptung beachten wir zunächst, daß die drei Punkte A, P, S die Gerade g in drei Strecken zerlegen. Da der Punkt T nun auf jeder dieser drei Strecken gelegen sein kann, so erhalten wir drei verschiedene Anordnungen der Punkte A, P, S, T (Fig. 100a, b, c). Im Falle der Fig. 100a ist dann nur die *Möglichkeit I* zu verwirklichen, und zwar dann, wenn der Punkt R auf der stark ausgezogenen Strecke TS liegt.

Im Falle der *Fig. 100b* tritt nur die *Möglichkeit II* auf, und zwar dann, wenn R auf der gestrichelten Strecke II liegt.

Im Falle der *Fig. 100c* tritt die Möglichkeit I auf, wenn R auf der stark ausgezogenen Strecke AS, und die Möglichkeit II, wenn R auf der gestrichelten Strecke II liegt.

In jedem Falle also ließe sich der Punkt R, und zwar als dyadisch-rationaler Punkt, d. h. als ein sich selbst entsprechender Punkt, stets so wählen, daß die Möglichkeit I oder II auftritt.

Wäre nun der Punkt R nach der Möglichkeit I gewählt, so würde es nach dem Satze 18 S. 109 ein Punktepaar H_1, H_2 geben, das gleichzeitig zu den Bildpunktepaaren A, T und P, R harmonisch wäre. Nach dem Satze der vorigen Seite müßten also auch die den Bildpunkten H_1, H_2 zugeordneten Originalpunkte G_1, G_2 gleichzeitig zu den Originalpunktepaaren A, S und P, R harmonisch liegen, was aber nach dem Satze 18 S. 109 unmöglich ist, da diese Punktepaare sich eben trennen.

Das Analoge gilt für die Möglichkeit II. Also müssen notwendig die Punkte S, T auch identisch sein, d. h.: *Alle Punkte der x-Achse entsprechen sich selbst.* Analog entsprechen sich auch alle Punkte der y-Achse selbst.

Also muß überhaupt jeder Punkt der projektiven Ebene bei der zusammengesetzten Verwandtschaft sich selbst entsprechen, diese also die Identität sein, was wir noch zu beweisen hatten.

Aus den bisherigen Betrachtungen folgt ferner auch sogleich der Satz:

9. Eine Kollineation oder projektive Verwandtschaft ist eindeutig bestimmt, wenn zwei solche entsprechenden Punktquadrupel A, P, Q, E und $\bar{A}, \bar{P}, \bar{Q}, \bar{E}$ als Original- und als Bildpunkte gegeben sind, daß bei jedem Punktquadrupel keine drei Punkte in einer Geraden liegen.

Hieraus folgt aber sogleich weiter:

10. Es gibt ∞^8 verschiedene solche Zuordnungen von Punkten A, P, Q, E zu gegebenen Punkten $\bar{A}, \bar{P}, \bar{Q}, \bar{E}$, wie es auch ∞^8 verschiedene Transformationen (1) *oder projektive Verwandtschaften gibt, und es besteht bei gegebenem projektiven Koordinatensystem eine eineindeutige Zuordnung aller möglichen solcher Zuordnungen und aller möglichen Transformationen* (1).

Ferner erkennen wir leicht:

11. Die Aufeinanderfolge von zwei projektiven Verwandtschaften (und damit auch von einer endlichen Zahl von projektiven Verwandtschaften) ist stets wieder eine projektive Verwandtschaft.

Wir stellen nun noch folgende allgemeine *Definition* auf:

12. Eine Gesamtheit von gegebenen beliebigen Transformationen bildet eine Gruppe, wenn die Aufeinanderfolge von irgend zwei dieser Transformationen wieder eine Transformation der Gesamtheit darstellt.

Dann können wir auch sagen:

13. Die Gesamtheit aller ∞^8 möglichen projektiven Verwandtschaften bildet eine Gruppe.

Hier tritt uns also zum ersten Male der Gruppenbegriff entgegen, der später noch eine große Rolle spielen wird.

Wir wollen noch nach Analogie der Sätze 3 und 8 S. 124 und S. 126 die folgenden Sätze hinzufügen:

14. Bei der durch die Gleichungen (1) *bestimmten Kollineation gilt für die Linienkoordinaten der nach dem Satze 3 S. 130 einander entsprechenden Geraden $g, \bar{g}$ die folgende zu den Gleichungen* (1) *adjungierte Transformation*

$$\left.\begin{aligned} \bar{\varrho} \cdot \bar{u} &= A \cdot u + B \cdot v + \Gamma \cdot t, \\ \bar{\varrho} \cdot \bar{v} &= A' \cdot u + B' \cdot v + \Gamma' \cdot t, \\ \bar{\varrho} \cdot \bar{t} &= A'' \cdot u + B'' \cdot v + \Gamma'' \cdot t \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

und umgekehrt die zu den Gleichungen (3) *adjungierte Transformation*

$$\begin{aligned} \varrho^{**} \cdot u &= \alpha \cdot \bar{u} + \alpha' \cdot \bar{v} + \alpha'' \cdot \bar{t}, \\ \varrho^{**} \cdot v &= \beta \cdot \bar{u} + \beta' \cdot \bar{v} + \beta'' \cdot \bar{t}, \\ \varrho^{**} \cdot t &= \gamma \cdot \bar{u} + \gamma' \cdot \bar{v} + \gamma'' \cdot \bar{t}. \end{aligned} \tag{7}$$

Ein einfaches Beispiel einer projektiven Verwandtschaft in der Ebene bietet uns die bereits im § 5 S. 46ff. behandelte *Zentralkollineation* dar; für diese gelten ja nach den Sätzen 2 und 4 des § 5 S. 47 die Voraussetzungen des Fundamentalsatzes 6 S. 131. Nach dem Satze 7 S. 48 ist eine Zentralkollineation bestimmt durch das Zentrum O, die Kollineationsachse s und ein Paar entsprechender Punkte. Wir wählen nun (Fig. 101) für ein einzuführendes Koordinatensystem das Fundamentaldreieck APQ mit dem Einheitspunkt E am einfachsten so, daß der Eckpunkt A durch das Zentrum O gegeben wird, die Eckpunkte P, Q auf der Kollineationsachse s liegen und der Einheitspunkt E der Originalpunkt des gegebenen Punktepaares ist, dessen zugeordneter Bildpunkt jetzt mit $\bar{E}$ bezeichnet sei. Es möge der Punkt $\bar{E}$ die Koordinaten $(\alpha, \alpha, 1)$ besitzen.

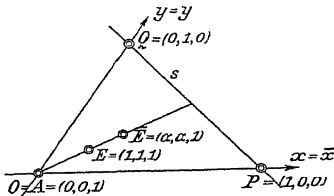



Fig. 101.

15. Die Zentralkollineation wird dann ersichtlich durch die Formeln gegeben

$$\left.\begin{aligned} \varrho \cdot \bar{x} &= \alpha \cdot x, \\ \varrho \cdot \bar{y} &= \alpha \cdot y, \\ \varrho \cdot \bar{s} &= s \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

mit der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha^2 \neq 0. \tag{9}$$

Es sind die Unterdeterminanten, die Adjunkten (vgl. S. 122)

$$\begin{aligned} A &= \alpha, & B &= 0, & \Gamma &= 0, \\ A' &= 0, & B' &= \alpha, & \Gamma' &= 0, \\ A'' &= 0, & B'' &= 0, & \Gamma'' &= \alpha^2. \end{aligned}$$

Also lautet *die adjungierte Transformation für die Linienkoordinaten*

$$\left.\begin{aligned} \bar{\varrho} \cdot \bar{u} &= \alpha \cdot u, \\ \bar{\varrho} \cdot \bar{v} &= \alpha \cdot v, \\ \bar{\varrho} \cdot \bar{t} &= \alpha^2 \cdot t \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

mit der Determinante
$$\Delta' = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{vmatrix} = \alpha^4 = \Delta^2.$$

Setzen wir noch $\frac{\bar{\varrho}}{\alpha} = \varrho_0$, so können wir die Transformation (10) einfacher so schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_0 \cdot \bar{u} &= u, \\ \varrho_0 \cdot \bar{v} &= v, \\ \varrho_0 \cdot \bar{t} &= \alpha \cdot t. \end{aligned}\right\} \qquad (10')$$

Es gilt ersichtlich auch der Satz:

16. Alle ∞^1 Zentralkollineationen mit demselben Zentrum O und derselben Kollineationsachse s bilden für sich eine Gruppe, also eine „Untergruppe" der Gruppe aller ∞^8 projektiven Verwandtschaften. —

Wir wollen jetzt noch kurz auf die folgende allgemeinste Deutung der Transformationsformeln (1) S. 129 hinweisen:

17. Wir können eine solche Transformation (1) *auch auf zwei verschiedene projektive Ebenen des Raumes beziehen, wobei in der einen ein beliebiges* (x, y, s)-*Koordinatensystem, in der anderen ein beliebiges* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$-*Koordinatensystem zugrunde gelegt ist, oder auch auf zwei sich deckende Ebenen, in denen zwei verschiedene Koordinatensysteme festgelegt sind.*

Bei der *ersten* Deutung der Transformation (1) im § 16 hatten wir zwar verschiedene Koordinatensysteme, doch entsprechende Punkte (x, y, s) und $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$ fielen zusammen. Bei der *zweiten* Deutung zu Anfang dieses Paragraphen waren die Koordinatensysteme identisch, doch entsprechende Punkte verschieden. Bei der *dritten* Deutung im Satze 17 sind dann sowohl die Koordinatensysteme wie die entsprechenden Punkte verschieden. Wir könnten dementsprechend bei dem Satze 17 von einer *projektiven Punkt- und Koordinatentransformation* sprechen. Doch werden wir von dieser allgemeinsten Deutung der Transformationsformeln (1) weiterhin keinen Gebrauch machen. —

Von dem Fundamentalsatze der projektiven Geometrie, dem Satze 6 S. 131, wollen wir jedoch noch eine *wichtige Anwendung* machen: Wir blicken zurück zu unserem Aufbau des projektiven Koordinatensystems nach der Möbiusschen Netzkonstruktion. Diesen Aufbau können wir nun noch von einer anderen Seite her beleuchten. Wir können nämlich, gleichsam als Umkehrung des Satzes 1 S. 99, den Satz aufstellen:

18. Es soll ein solches (X, Y, S)-*Koordinatensystem in der Ebene aufgestellt werden, daß jedem Punkt ein Tripel von Zahlen* X, Y, S *und jedem solchen Zahlentripel ein Punkt zugeordnet ist* (wobei es natürlich wieder nur auf das

Verhältnis der Zahlen X, Y, S ankommt und nicht gleichzeitig alle drei Zahlen gleich 0 sind). *Ferner soll das Koordinatensystem die Bedingung erfüllen, daß jede Gerade durch eine lineare Gleichung der Koordinaten X, Y, S dargestellt wird. Ein solches Koordinatensystem ist notwendig ein projektives Koordinatensystem, d. h. ein solches, wie wir es auf Grund der Möbiusschen Netzkonstruktion (also mit Hilfe des Satzes von Desargues und der Anwendung des Dedekindschen Stetigkeitsaxioms) gewonnen haben.*

Die *eineindeutige* Zuordnung der Punkte der Ebene und der Zahlentripel X, Y, S ist vorauszusetzen notwendig. Sonst könnten wir z. B. allen Punkten der Ebene dieselben Koordinaten X_0, Y_0, S_0 zuordnen. Die Forderung der Gültigkeit des Desarguesschen Satzes aber ist gleichwertig mit der Forderung, daß jede Gerade durch eine lineare Gleichung darstellbar sein soll.

Es sei nun irgendein den Voraussetzungen des Satzes genügendes (X, Y, S)-Koordinatensystem gegeben. In diesem Koordinatensystem muß es dann zunächst einmal nach den Voraussetzungen des Satzes 18 vier verschiedene Punkte P, Q, A, E geben, welche die in der Tabelle S. 120 gegebenen Koordinaten besitzen und von denen dann keine drei in einer Geraden liegen. Letzteres folgt ja einfach daraus, daß die Koordinaten von dreien dieser vier Punkte nicht dieselbe lineare Gleichung erfüllen. Wir wollen nun zeigen, daß *das (X, Y, S)-Koordinatensystem nun notwendig identisch ist mit dem projektiven (x, y, s)-Koordinatensystem,* das sich aus dem Fundamentaldreieck APQ mit dem Einheitspunkt E auf Grund der Möbiusschen Netzkonstruktion ergibt. Jeder neu aus den Punkten $P, Q, A, E = B'$ konstruierte Punkt wird ja als Schnittpunkt zweier Geraden erhalten, welche zwei bereits konstruierte Punkte verbinden. Hiernach muß notwendig auch in dem (X, Y, S)-Koordinatensystem z. B. der Punkt U die Koordinaten $(1, 1, 0)$, der Punkt B die Koordinaten $(1, 0, 1)$ besitzen (vgl. die Fig. 49 und 52 S. 59 und S. 63); überhaupt müssen alle Punkte, die durch eine *endliche* Zahl von projektiven Operationen (Verbinden zweier bereits konstruierter Punkte und zum Schnittbringen zweier Verbindungsgeraden) gewonnen werden, auch in dem (X, Y, S)-Koordinatensystem notwendig *dieselben Koordinaten* besitzen, wie der Aufbau des projektiven (x, y, s)-Koordinatensystems sie für das Fundamentaldreieck APQ mit dem Einheitspunkt E geliefert hat. Mit anderen Worten: Alle dyadisch-rationalen, ja auch alle rationalen Punkte des projektiven (x, y, s)-Koordinatensystems (vgl. auch § 13 S. 103) müssen in dem vorhandenen (X, Y, S)-Koordinatensystem dieselben Koordinaten besitzen. Es könnte also nur möglich sein, daß die *irrationalen* Punkte des projektiven (x, y, s)-Koordinatensystems in dem gegebenen (X, Y, S)-Koordinatensystem andere Koordinaten besäßen.

Nun aber wollen wir eine solche Verwandtschaft zwischen den Punkten (x, y, s) und (X, Y, S) der Ebene aufstellen, wie sie durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varrho \cdot x &= X, \\ \varrho \cdot y &= Y, \\ \varrho \cdot s &= S \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

gegeben ist; wir betonen, daß in diesen Gleichungen die (X, Y, S)-Koordinaten noch nicht als projektive nachgewiesen sind. Ersichtlich hat diese Verwandtschaft die Eigenschaft, *eine Gerade, wie sie durch die Gleichung*

$$\omega_1 \cdot X + \omega_2 \cdot Y + \omega_3 \cdot S = 0$$

mit den konstanten Koeffizienten ω_i *gegeben ist, wieder in eine Gerade, die dann durch die Gleichung*

$$\omega_1 x + \omega_2 \cdot y + \omega_3 \cdot s = 0$$

gegeben ist, überzuführen.

Dann aber können wir unmittelbar den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie, den Satz 6 S. 131, anwenden. Ihm gemäß muß hier die gegebene Verwandtschaft also durch eine lineare Transformation zwischen den Koordinaten desselben *projektiven* Koordinatensystems gegeben sein, die dann eben durch die Gleichungen (11) bestimmt ist, d. h. auch X, Y, S müssen *projektive* Koordinaten und mit den projektiven Koordinaten x, y, s identisch sein.

Lag also noch eine große Willkür darin, daß wir beim Aufbau des projektiven Koordinatensystems z. B. den Punkten $B, C, D \ldots$ der x-Achse die Abszissen $1, 2, 3, \ldots$ zugeordnet haben (Fig. 49 S. 59), so ist diese Willkür jetzt durch den Satz 18 dadurch behoben, daß diese Zuordnung *notwendig* ist, wenn jede Gerade durch eine lineare Gleichung dargestellt werden soll.

Damit hat dann auch die Aufstellung unseres projektiven Koordinatensystems einen guten Abschluß gefunden.

§ 18. Die Invarianz des Doppelverhältnisses bei einer projektiven Verwandtschaft der Ebene.

Wegen der ganz besonderen Wichtigkeit, die der Begriff des Doppelverhältnisses von vier Punkten einer beliebigen Geraden für unsere spätere Betrachtung besitzt, sei rückblickend noch einmal an die Definitionen 3 S. 104 und 12 S. 108 erinnert, sowie daran, daß dieser Begriff vom Koordinatensystem unabhängig, also eine rein projektiv-geometrische Größe ist, gemäß den Sätzen 7 S. 118, sowie 10 S. 126 und 11 S. 127.

Wir können nunmehr unseren Betrachtungen über die *projektive Verwandtschaft in der Ebene* im § 17 sogleich den folgenden wichtigen Satz anschließen:

1. Je vier Originalpunkte R_i *auf einer Geraden und ihre vier entsprechenden Bildpunkte* $\overline{R}_i$ *bei einer gegebenen projektiven Verwandtschaft haben stets dasselbe*

Doppelverhältnis (d. h. denselben Zahlenwert des aus den Koordinaten x_i oder y_i bzw. den Koordinaten $\bar{x}_i$ oder $\bar{y}_i$ gebildeten Doppelverhältnisausdrucks (5) S. 104).

Der Beweis dieses Satzes ist ganz analog dem Beweise des Satzes 10 S. 126. Wir können also das Doppelverhältnis von vier Punkten auch als eine *Invariante der Gruppe aller projektiven Verwandtschaften* bezeichnen. Einen speziellen Fall des Satzes 1 stellt ja der Satz 8 S. 132 dar.

Durch den Satz 13 auf S. 128 ist auch bereits die Definition des Doppelverhältnisses *von vier Strahlen r_i eines Strahlenbüschels* gegeben und seine Unabhängigkeit von dem eingeführten Koordinatensystem hervorgehoben. Diese Definition läßt sogleich auch den zum Satze 1 dualen Satz erkennen:

2. *Je vier Originalgeraden r_i durch denselben Punkt und ihre vier entsprechenden Geraden $\bar{r}_i$ bei einer gegebenen projektiven Verwandtschaft haben stets dasselbe Doppelverhältnis.*

Vier harmonischen Originalgeraden r_i entsprechen also auch stets vier harmonische Bildgeraden $\bar{r}_i$ und umgekehrt.

Doch wir wollen jetzt noch den *Wert des Doppelverhältnisses von vier Geraden r_i durch denselben Punkt T* auszurechnen lernen, *wenn die vier Geraden durch die homogenen Linienkoordinaten u_i, v_i, t_i gegeben sind.* Wir können ja, analog wie früher (S. 126 und S. 130) für Punktkoordinaten, setzen

$$\begin{aligned} u_3 &= u_1 + \lambda' \cdot u_2, \\ v_3 &= v_1 + \lambda' \cdot v_2, \\ t_3 &= t_1 + \lambda' \cdot t_2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} u_4 &= u_1 + \mu' \cdot u_2, \\ v_4 &= v_1 + \mu' \cdot v_2, \\ t_4 &= t_1 + \mu' \cdot t_2, \end{aligned}$$

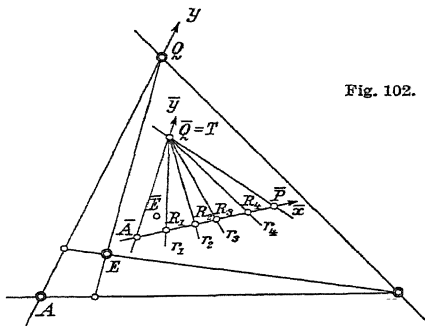
wo λ', μ' zwei bestimmte, von 0 und ∞ verschiedene Zahlen sind und auf den linken Seiten ein Proportionalitätsfaktor bei jedem der Gleichungstripel in die Zahlen $u_3, v_3, \ldots$ hineingenommen ist. Der Schnittpunkt T der Geraden r_1, r_2 wird ja durch die Gleichung dargestellt (vgl. den Satz 3b S. 112)

$$\begin{vmatrix} u & v & t \\ u_1 & v_1 & t_1 \\ u_2 & v_2 & t_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Wir stellen jetzt den Satz auf:

3. *Das Doppelverhältnis der vier Geraden r_i wird durch die Zahl $\frac{\lambda'}{\mu'}$ gegeben* (vgl. S. 127).

Zum Beweise führen wir ein neues Koordinatensystem ein, dessen Fundamentaldreieck $\bar{A}\bar{P}\bar{Q}$ den Punkt T als Eckpunkt $\bar{Q}$ besitzt (Fig. 102). Die Gerade $\bar{A}\bar{P}$ möge die Strahlen r_i in den vier Punkten R_i schneiden, die der Einfachheit unserer Rechnung zuliebe von $\bar{A}$ und $\bar{P}$ verschieden sein mögen. Für die neuen Linienkoordinaten $\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{t}_i$ der Geraden r_i gilt dann wegen der hier gültigen Transformationen (12) S. 123 ebenfalls $\bar{u}_3 = \bar{u}_1 + \lambda' \cdot \bar{u}_2$ usw. Doch ist jetzt $\bar{v}_i = 0$, da ja alle Geraden r_i durch den Eckpunkt $\bar{Q}$ gehen, der eben durch die Gleichung $\bar{v} = 0$ entsprechend seinen Punktkoordinaten $\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}$ gegeben ist (vgl. den Satz 3b S. 112). Jedoch ist $\bar{u}_i \neq 0$ und $\bar{t}_i \neq 0$, da keine der Geraden r_i ja durch die Eckpunkte $\bar{P}$ oder $\bar{A}$ hindurchgeht, die bzw. durch $\bar{u} = 0$ und $\bar{t} = 0$ gegeben sind.

Fig. 102.

Führen wir nun unhomogene Linienkoordinaten $\bar{u}_i$, $\bar{v}_i = 0$ ein, so ist jetzt

$$\bar{u}_3 = \frac{\bar{u}_1 + \lambda \cdot \bar{u}_2}{1 + \lambda},$$

$$\bar{u}_4 = \frac{\bar{u}_1 + \mu \cdot \bar{u}_2}{1 + \mu},$$

wo

$$\lambda = \lambda' \cdot \frac{\bar{t}_2}{\ },$$

$$\mu = \mu' \cdot \frac{\ }{\bar{t}_1}$$

ist. Die Schnittpunkte R_i haben nun gemäß dem Satze 2 S. 111 die unhomogenen Abszissen

$$\bar{x}_i = -\frac{1}{\bar{u}_i}.$$

Dann gilt nunmehr für das Doppelverhältnis der vier Geraden nach dem Satze 13 S. 128

$$(r_1 r_2 r_3 r_4) = (R_1 R_2 R_3 R_4),$$

wo für die *Zahlen* $\bar{x}_i$ und $\bar{u}_i$

$$(R_1 R_2 R_3 R_4) = (\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4) = \left(\frac{1}{\bar{u}_1}\,\frac{1}{\bar{u}_2}\,\frac{1}{\bar{u}_3}\,\frac{1}{\bar{u}_4}\right) = (\bar{u}_1 \bar{u}_2 \bar{u}_3 \bar{u}_4) = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda'}{\mu'}$$

ist, was wir beweisen wollten.

Jetzt gewinnt auch der Satz 2 S. 140, daß $(r_1 r_2 r_3 r_4) = (\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_3 \bar{r}_4)$ ist, durch den Satz 3 eine neue Beleuchtung.

§ 19. Projektive Verwandtschaft auf einer Geraden.

Wir wollen nun kurz auf die analogen Betrachtungen hinweisen, die sich auf die *projektive Verwandtschaft* (Projektivität) *der Punkte einer Geraden g* allein, also eines Grundgebildes 1. Stufe in der projektiven Ebene, beziehen. Wir denken auf der gegebenen Geraden g ein Abszissensystem konstruiert und stellen dann wieder folgende *Definition* an die Spitze:

1. Unter der projektiven Verwandtschaft auf der Geraden g verstehen wir die Zuordnung der Punkte, welche durch die Transformationsgleichung bestimmt ist:

$$\bar{x} = \frac{a x + b}{c x + d}, \tag{1}$$

wo a, b, c, d gegebene endliche Zahlen sind mit der Determinante

$$\Delta_0 = a d - b c \neq 0. \tag{2}$$

Statt der Gleichung (1) können wir *bei Einführung homogener Koordinaten* auch schreiben

$$\begin{aligned} \varrho \cdot \bar{x} &= a x + b s, \\ \varrho \cdot \bar{s} &= c x + d s, \end{aligned} \tag{1'}$$

Aus der Gleichung (1) folgt umgekehrt

$$x = \frac{d \bar{x} - b}{- c \bar{x} + a} \tag{3}$$

oder homogen geschrieben

$$\left.\begin{aligned} \varrho^* \cdot x &= d \bar{x} - b \bar{s}, \\ \varrho^* \cdot s &= - c \bar{x} + a \bar{s}, \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

wo $\varrho^* = \frac{\Delta_0}{\varrho}$ ist.

Die Gerade g können wir uns auch wieder doppelt mit Punkten überdeckt denken, den Originalpunkten x und den Bildpunkten $\bar{x}$ entsprechend.

Die projektive Verwandtschaft (1) hat nun ersichtlich die Eigenschaft:

2. Je vier harmonischen Originalpunkten x_i entsprechen vier harmonische Bildpunkte $\bar{x}_i$ und umgekehrt.

Es folgt dies ja schon aus dem Satze 4 S. 118.

Wir können den Satz 2 aber auch wie folgt einfach beweisen: Wir bilden uns die folgende spezielle projektive Verwandtschaft der ganzen Ebene:

$$\left.\begin{aligned} \varrho \cdot \bar{x} &= \alpha x + \beta y + \gamma s, \\ \varrho \cdot \bar{y} &= \beta' y, \\ \varrho \cdot \bar{s} &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' s, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= a, \\ \gamma &= b, \\ \alpha'' &= c, \\ \gamma'' &= d \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

ainante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & 0 \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \beta' \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha'' & \gamma \end{vmatrix} = \beta' \cdot \Delta_0 \neq 0,$$

d. h. auch $\beta' \neq 0$ ist.

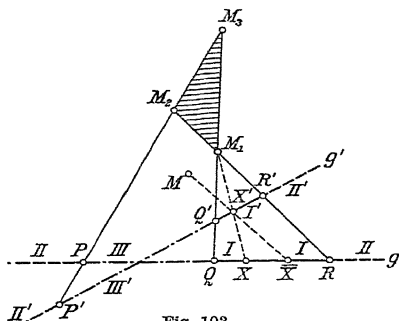
Diese projektive Verwandtschaft (4) führt die x-Achse so in sich über, wie es die gegebene Gleichung (1) verlangt. Dann aber müssen nach dem Satze 8 S. 132 vier harmonischen Originalpunkten x_i vier harmonische Bildpunkte $\bar{x}_i$ entsprechen und umgekehrt.

Nun aber gilt die wichtige Umkehrung, der *Fundamentalsatz der projektiven Geometrie für eine Gerade:*

3. Es sei ein irgendwie erhaltenes Punktentsprechen, eine Verwandtschaft, auf einer Geraden g gegeben mit den Eigenschaften:

Je zwei Punkte der doppelt zu denkenden Geraden sind einander als Original- und Bildpunkt zugeordnet. Je vier harmonischen Originalpunkten R_i entsprechen vier harmonische Bildpunkte $\bar{R}_i$. Ein solches Punktentsprechen ist dann stets eine p r o j e k t i v e *Verwandtschaft, d. h. es wird durch eine lineare Transformation* (1) *dargestellt.*[1])

Fig. 103.

Im Gegensatz zu dem Satze 6 S. 131 wird hier auch vorausgesetzt, daß *harmonischen Originalpunkten harmonische Bildpunkte entsprechen.* Wir können an einem einfachen Beispiel leicht einsehen, daß diese Voraussetzung notwendig ist. Es seien in der Fig. 103 zunächst die zwei Geraden g, g' von den

1) Diesem Fundamentalsatze der projektiven Geometrie, der bei anderer Definition der projektiven Verwandtschaft auf einer Geraden, als wir sie hier durch den Satz 1 gegeben haben, entsprechend eine andere Form besitzt, ist seit v. Staudt (1847) eine große Zahl von Arbeiten, insbesondere von C. Weierstraß, F. Klein, G. Darboux, F. Schur, F. Enriques und anderen, gewidmet. Vgl. im einzelnen wegen der Literatur F. E n r i q u e s, Enzyklopädie, III, 1, erste Hälfte, S. 77—81; A. S c h o e n f l i e s, Enzyklopädie III, 1, erste Hälfte S. 446ff., sowie F. S c h u r, Grundlagen der Geometrie, S. 49, 166ff. u. 188.

drei Zentren M_1, M_2, M_3 aus so aufeinander projiziert, daß kurz gesagt von M_1 aus die Punkte der (stark ausgezogenen) Strecken I, I′, von M_2 aus die Punkte der (gestrichelten) Strecken II, II′ und von M_3 aus die Punkte der (strichpunktierten) Strecken III, III′ einander zugeordnet sind. Die so einander entsprechenden Punkte der Geraden g, g' seien allgemein mit X, X' bezeichnet. Es seien dann noch alle Punkte der Geraden g' von einem beliebigen Zentrum M aus auf g projiziert. Jedem Punkt X von g als einem Originalpunkte soll dann derjenige Punkt $\overline{X}$ von g als Bildpunkt zugeordnet sein, der aus dem entsprechenden Punkte X' auf g' durch Projektion von M aus entstanden ist. (Ist insbesondere z. B. $M = M_1$ gewählt, so entsprechen sich die Punkte der Strecke I selbst.) Gewiß aber entsprechen nicht stets je vier harmonischen Originalpunkten X_i wieder vier harmonische Bildpunkte $\overline{X}_i$, obwohl diese (nicht-projektive) Verwandtschaft auch eine stetige ist, gemäß der Definition 4 S. 130.

Aus den Voraussetzungen unseres Satzes 3 folgt nun zunächst die weitere Eigenschaft der Verwandtschaft:

4. Auch vier harmonischen Bildpunkten $\overline{R}_i$ entsprechen stets vier harmonische Originalpunkte R_i.

Denn wären diese entsprechenden Punkte R_i nicht harmonisch, so würden den Punkten R_1, R_2, R_3 und dem vierten harmonischen Punkte R^* zu ihnen doch die vier harmonischen Punkte $\overline{R}_i$ entsprechen müssen, also würden R^*, $\overline{R}_4$ und auch R_4, $\overline{R}_4$ einander zugeordnet sein, was einen Widerspruch bedeutet.

Fig. 104.

Der Beweis des Satzes 3 ist nun ganz analog zu führen, wie der Beweis des Satzes 6 S. 131, so daß wir nicht weiter darauf eingehen.

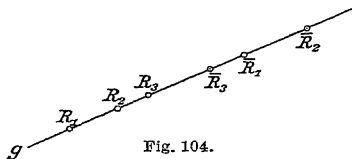
Es gilt ferner auch der Satz:

5. Eine projektive Verwandtschaft auf einer Geraden g ist eindeutig bestimmt, wenn zwei entsprechende Punktetripel R_1, R_2, R_3 und $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$, $\overline{R}_3$ gegeben sind (Fig. 104).

Denn diese Punktetripel bestimmen bei einem gegebenen Abszissensystem auf der Geraden eindeutig die Transformationsformel (1) (vgl. die Betrachtungen S. 113).

Auch gilt dem Satze 13 S. 135 entsprechend der Satz:

6. Die ∞^3 möglichen projektiven Verwandtschaften auf einer Geraden g bilden eine Gruppe.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß auch der Satz 17 S. 137 sich sinngemäß auf die Transformation (1) S. 142 übertragen läßt.

Wir wollen jedoch noch die Frage aufwerfen, *wie viele sich selbst entsprechende Punkte bei einer projektiven Verwandtschaft auf einer Geraden g vorhanden sind.*

Die Identität $\bar{x} = x$ sei natürlich ausgeschlossen, d. h. der Fall $c = b = 0$, $a = d$ in der Gleichung (1).

Aus den Gleichungen (1') folgt zunächst für den *Fall* $c = 0$, daß die sich selbst entsprechenden Punkte durch den Punkt $\bar{s} = s = 0$ (d. h. den Punkt $\bar{x} = x = \infty$ bei unhomogenen Abszissen) und durch den Punkt $\frac{\bar{x}}{\bar{s}} = \frac{x}{s} = \frac{b}{d-a}$ gegeben sind, wobei jedoch für $a = d$, $b \neq 0$ beide Punkte identisch sind.

Im Falle $c \neq 0$ ergibt die Gleichheit der Abszissen x, $\bar{x}$ in der Gleichung (1) sofort die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}.$$

Beide Fälle können wir nun in dem allgemeinen Satze zusammenfassen:

7. Je nachdem der Ausdruck $(a-d)^2 + 4bc \gtreqless 0$ *ist, ergeben sich zwei sich selbst entsprechende Punkte bzw. ein oder kein (reeller) solcher Punkt.*

Alle hier für die Punkte einer Geraden ausgeführten Betrachtungen lassen sich natürlich auch für das andere Grundgebilde erster Stufe in der projektiven Ebene, das Strahlenbüschel, ausführen. Wir haben dann das Strahlenbüschel ja auch doppelt überdeckt zu denken, nämlich als Gesamtheit der Originalstrahlen und der Bildstrahlen. Wir sprechen demgemäß auch von einer projektiven Verwandtschaft dieser sich deckenden Strahlenbüschel mit demselben Träger. Um die Verhältnisse hier einfach zu übersehen, brauchen wir ja nur die Strahlenbüschel durch eine beliebige Gerade g geschnitten zu denken und dann die projektive Verwandtschaft in der Geraden g auf die Strahlenbüschel zu übertragen. Es erübrigt sich, näher hierauf einzugehen.

§ 20. Die Involutionen bei einer Punktreihe oder einem Strahlenbüschel.

Wir knüpfen an die Betrachtungen über die projektive Verwandtschaft auf einer Geraden oder bei einer Punktreihe an, d. h. an die Gleichung

$$\bar{x} = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{für} \quad \Delta_0 = ad - bc \neq 0. \tag{1}$$

Wir stellen nunmehr folgende *Definition* auf:

1. Eine projektive Verwandtschaft bei einer Punktreihe nennt man eine wechselseitige oder involutorische Verwandtschaft, eine I n v o l u t i o n, *wenn je zwei Punkte* x, $\bar{x}$ *sich wechselseitig entsprechen, d. h. wenn dem Punkte* x *als Originalpunkt der Punkt* $\bar{x}$ *als Bildpunkt und demselben Punkte* $\bar{x}$ *als Originalpunkt wieder derselbe Punkt* x *als Bildpunkt entspricht.*

Wir wollen hier jedoch auch den Fall $\Delta_0 = 0$ nicht ausschließen; jedoch soll nicht $a = b = c = d = 0$ sein. Aus der Gleichung (1) folgt zunächst

$$c x \bar{x} + d \bar{x} - a x - b = 0. \tag{2}$$

Bei einer wechselseitigen Verwandtschaft muß nun ersichtlich diese Gleichung unverändert bestehen bleiben, wenn wir die Zahlen x, $\bar{x}$ in ihr miteinander vertauschen. Es sei nun der Fall der „*Identität*" ausgeschlossen, d. h. der Fall, daß stets $\bar{x} = x$ ist (d. h. daß $a = d \neq 0$ und $b = c = 0$ ist). Aus der Gleichung (2) und der Gleichung

$$c x \bar{x} + d x - a \bar{x} - b = 0$$

folgt dann durch Subtraktion beider Gleichungen

$$(\bar{x} - x)(a + d) = 0.$$

2. *Eine projektive Verwandtschaft ist also stets und nur dann eine Involution, wenn*

$$d = -a \tag{3}$$

ist.

Die Gleichung (2) geht dann über in die Gleichung

$$c x \bar{x} - a(\bar{x} + x) - b = 0 \tag{2'}$$

oder homogen geschrieben

$$c x \bar{x} - a(s \bar{x} + x \bar{s}) - b s \bar{s} = 0. \tag{2''}$$

Es sind jetzt also die Punkte der Punktreihe paarweise einander zugeordnet, so daß wir auch nicht mehr Original- und Bildpunkte zu unterscheiden, auch die Punktreihe oder ihren Träger, die Gerade, nicht doppelt überdeckt zu denken brauchen.

Wir fragen nun nach den *Doppelpunkten* der Involution, d. h. den Punkten, die sich selbst entsprechen. Für $\bar{x} = x$ ergibt sich aus der Gleichung (2')

$$c x^2 - 2 a x - b = 0 \tag{4}$$

oder homogen geschrieben $\quad c x^2 - 2 a x s - b s^2 = 0. \qquad (4')$

Für $c = 0$ ergibt die Gleichung (4') die Doppelpunkte

$$s = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x}{s} = -\frac{b}{2a}. \tag{5a, b}$$

Für $c \neq 0$ dagegen sind (bei nicht-homogener Schreibweise) die Doppelpunkte x_1, x_2 gegeben durch die Gleichungen

$$x_{1,2} = \frac{a}{c} \pm \frac{1}{c} \sqrt{a^2 + b c}. \tag{6a, b}$$

Beides können wir in den einen Satz zusammenfassen:

3. Die Involution hat zwei reelle getrennte, einen (doppelt zählenden) reellen oder zwei konjugiert imaginäre Doppelpunkte, je nachdem

$$a^2 + bc = -\Delta_0 \gtreqless 0 \tag{7}$$

ist (vgl. den Satz 7 S. 145).

Diesen drei Möglichkeiten entsprechend definieren wir weiter:

3a. Wir nennen demgemäß die Involution bzw. hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch.

Diese Bezeichnung ist der Analogie mit dem Satze der analytischen Geometrie der euklidischen Ebene entlehnt:

Ein nicht zerfallender reeller Kegelschnitt ist eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem die unendlich ferne Gerade den Kegelschnitt in zwei reellen, einem doppelt zählenden reellen oder in zwei konjugiert imaginären Punkten schneidet.

Zum ersten Male sprechen wir hier von *Punkten mit komplexen Abszissen*; solche Punkte haben natürlich an sich keine wirkliche Existenz. Aus der analytischen Geometrie in der euklidischen Ebene ist uns indes der Vorteil der Einführung solcher Punkte bereits bekannt. Wenn wir sie zulassen, so lassen sich eben viele Sätze allgemein aussprechen, z. B. der Satz der euklidischen Geometrie:

Eine beliebige Gerade schneidet einen gegebenen Kreis stets in zwei Punkten, die auch zusammenfallen können.

Hier in der projektiven Geometrie haben aber doch die konjugiert-imaginären Punkte eine *reelle Veranschaulichung. Zwei Punkte mit konjugiert-imaginären Abszissen oder kurz zwei konjugiert-imaginäre Punkte werden eben auf ihrer reellen Verbindungsgeraden durch eine elliptische Involution dargestellt, deren Doppelpunkte sie sind.*

Doch besteht ein *wesentlicher Unterschied zwischen unserer früheren Einführung der „uneigentlichen" Punkte im § 4* (man vgl. z. B. S. 33 daselbst) *und der jetzigen Einführung der „komplexen" Punkte.* In beiden Fällen besitzen zwar solche Punkte keine wirkliche Existenz. Sie stellen eigentlich nur einen bequemen Ausdruck für andere geometrische Dinge dar, der einzelne uneigentliche Punkt eben ein bestimmtes reelles Strahlenbüschel, ein einzelnes Paar konjugiert-imaginärer Punkte eine elliptische Punktinvolution auf einer Geraden. *Auf die uneigentlichen Punkte konnten wir aber den ursprünglichen Begriff „zwischen" übertragen* und demgemäß bei den Axiomen der Verknüpfung und Anordnung, sowie auch bei dem Stetigkeitsaxiom von Dedekind die uneigentlichen Punkte mit umfassen. Dies geht aber keineswegs bei den komplexen Punkten. Wir haben ja auf einer Geraden ∞^2 komplexe Punkte, entsprechend

den ∞^2 verschiedenen elliptischen Involutionen auf einer Geraden. Demgemäß können wir nicht davon sprechen, daß ein dritter Punkt „zwischen" irgend zwei gegebenen komplexen Punkten gelegen sein soll, ebensowenig wie wir eine dritte Zahl etwa „zwischen den beiden Zahlen 5 und $1 + 2i$" angeben können. Wir können hier am besten einen Blick zurückwerfen zu dem Hilbertschen Stetigkeitsaxiom V, 2 (vgl. S. 72). Die komplexen Punkte stellen eben nicht eine Erweiterung des Systems der Elemente (Punkt, Gerade, Ebene) dar, so daß auch für das erweiterte System die bisherigen Axiome gelten. Auf S. 149 werden wir noch ein wenig eingehender von zwei konjugiert-komplexen Punkten einer Geraden sprechen.[1])

Wir wollen nämlich nun die drei verschiedenen Arten der Involutionen noch etwas näher betrachten.

Der bei der allgemeinen Projektivität von uns ausgeschlossene Fall $\Delta_0 = -(a^2 + bc) = 0$ tritt hier bei der *parabolischen Involution,* wie wir sehen, als Übergangsfall der hyperbolischen und elliptischen Involutionen auf. Wir wollen den Fall der parabolischen Involution uns noch etwas näher ansehen:

Es sei zunächst $c \neq 0$; wenn wir dann einfacher $c = 1$ setzen, so ist also wegen $\Delta_0 = 0$ jetzt $a^2 = -b$. Nach den Gleichungen (6a, b) hat der Doppelpunkt die Abszisse $x = a$. Ferner lautet die Gleichung (2′)

$$x\bar{x} - a(\bar{x} + x) + a^2 = 0$$

oder für $a \neq 0$
$$\bar{x}(x - a) = a(x - a) \qquad (8\text{a})$$

und etwa für $a = 0$
$$x \cdot \bar{x} = 0. \qquad (8\text{b})$$

Es sei ferner speziell $c = 0$, also wegen $\Delta_0 = 0$ auch $a = 0$. Jetzt ist $s = 0$ der Doppelpunkt. Und es ist (bei homogener Schreibweise) nach der Gleichung (2″) S. 146

$$s \cdot \bar{s} = 0, \qquad (8\text{c})$$

da ja $b \neq 0$ sein muß.

4. Jedem von $x = a$ bzw. im speziellen Fall von $s = 0$ verschiedenen Punkte ist der Punkt $\bar{x} = a$ bzw. $\bar{s} = 0$, also stets der Doppelpunkt D, zugeordnet, dem Doppelpunkt $x = a$ bzw. $s = 0$ selbst natürlich umgekehrt ein beliebiger Punkt.

5. Die parabolische Involution ist also auch allein durch den Doppelpunkt D bestimmt. Ist dieser der Punkt $x = 0$, so wird die Involution durch die Gleichung $x \cdot \bar{x} = 0$ gegeben.

---

1) Die Einführung der komplexen Punkte in die projektive Geometrie verdanken wir v. Staudt (Beiträge zur Geometrie der Lage, I. und II. Heft, Nürnberg 1856 und 1857, z. B. S. 114—119, S. 259—261. Wegen weiterer Literatur vgl. man A. Schoenflies, Enzyklopädie der math. Wiss. Bd. III, I, 1, S. 453—459 (Artikel: Projektive Geometrie).

Die *parabolische* Involution ist demnach insofern als eine *ausgeartete Involution* anzusehen, als nicht mehr ausnahmslos jeder einzelne Punkt der Geraden nur *einem* anderen zugeordnet ist.

Für die *hyperbolische* Involution gilt ferner noch folgender Satz:

6. *Die Doppelpunkte D_1, D_2 der hyperbolischen Involution sind harmonisch zu je zwei einander zugeordneten Punkten.*

Um diesen Satz zu beweisen, denken wir die Gleichung der Involution auf ein solches Abszissensystem transformiert, daß die Doppelpunkte die Punkte 0 und ∞ sind. Wenn wir dann unsere bisherige Bezeichnung beibehalten, so muß den Gleichungen (5a, b) gemäß jetzt $c = 0$ und $b = 0$ sein. *Dann lautet die Gleichung* (2′)

$$\bar{x} = -x. \tag{9}$$

Die Punkte $(\infty\, 0\, x\, \bar{x})$ haben dann ersichtlich stets das Doppelverhältnis -1, gemäß der Definition 3 S. 104.

Wir können aber sogleich noch einige weitere Sätze anschließen:

7. *Jede elliptische oder hyperbolische Involution ist durch zwei Paare einander zugeordneter Punkte $A, \bar{A}$ und $B, \bar{B}$ bestimmt und die hyperbolische Involution auch durch die beiden Doppelpunkte D_1, D_2 oder durch einen Doppelpunkt und ein Paar entsprechender Punkte.*

Dies folgt einfach schon aus dem Satze 5 S. 144 für die Projektivität auf einer Geraden. Ferner ergibt der obige Satz 6:

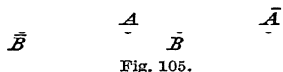
8. *Bei der hyperbolischen Involution sind die Doppelpunkte D_1, D_2 auch die zu den Punktepaaren $A, \bar{A}$ und $B, \bar{B}$ gleichzeitig harmonischen Punkte* (vgl. den Satz 18 S. 109). *Haben die Punkte $A, \bar{A}, D_1, D_2$ bzw. die Abszissen $0, \infty, \pm 1$, so lautet die Gleichung der hyperbolischen Involution einfach*

$$x \cdot \bar{x} = +1.$$

Nun wollen wir noch dem Falle der *elliptischen* Involution einige Ausführungen widmen. Im Hinblick auf die Bemerkung S. 147 über konjugiert-imaginäre Punkte können wir jetzt noch hinzufügen:

9. *Zwei konjugiert-imaginäre Punkte einer Geraden sind reell einfach durch zwei sich trennende Punktepaare $A, \bar{A}$; $B, \bar{B}$ dargestellt, die eben eine elliptische Involution bestimmen* (Fig. 105).

Fig. 105.

Wir können nun die S. 104 gegebene *Definition des Doppelverhältnisses von vier Punkten einer Geraden auch auf den Fall ausdehnen, daß einer oder mehrere dieser Punkte komplex sind,* d. h. durch komplexe Abszissen gegeben sind. Ganz allgemein sind dann vier Punkte einer Geraden harmonisch, wenn ihr Doppelverhältnis

gleich -1 ist. Dann können wir auch sagen, ganz den Verhältnissen bei der hyperbolischen Involution analog (vgl. den obigen Satz 6):

10. Die Doppelpunkte D_1, D_2 einer elliptischen Involution sind harmonisch zu je zwei einander zugeordneten Punkten. Sie sind also auch die beiden Punkte, die gleichzeitig harmonisch liegen zu den beiden die Involution festlegenden Punktepaaren $A, \bar{A}$ und $B, \bar{B}$.

Zum Beweise denken wir die Gleichung der elliptischen Involution auf ein solches Abszissensystem transformiert, daß ein beliebiges Paar $A, \bar{A}$ zugeordneter Punkte die Abszissen $0, \infty$ besitzt. Dann nimmt die allgemeine Gleichung (2′) S. 146, in der überdies wegen des Satzes 3 S. 147 $(a^2 + bc < 0)$ $c \neq 0$ sein muß, also auch $c = 1$ gewählt werden kann, die Form an

$$x \cdot \bar{x} = b < 0. \tag{10}$$

Die Doppelpunkte sind dann gegeben durch die Gleichungen

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{b}. \tag{11}$$

Also ist stets für zwei entsprechende Punkte $x, \bar{x}$

$$(x \bar{x} x_1 x_2) = -1.$$

Wir können nunmehr den Unterschied der drei Arten von Involutionen auch durch den folgenden Satz zum Ausdruck bringen:

11. Bewegt sich der eine Punkt $\bar{X}$ der zugeordneten Punkte $X, \bar{X}$ in bestimmter Richtung auf der Geraden g, so bewegt sich der entsprechende Punkt X bei der hyperbolischen Involution in entgegengesetzter Richtung, bei der elliptischen Involution in gleicher Richtung, während der Punkt X bei der parabolischen Involution unverändert bleibt, eben den Doppelpunkt darstellt.

Für die elliptische Involution wollen wir weiter noch folgenden Satz ableiten, den wir sehr bald benutzen werden:

12. Ist eine elliptische Involution auf einer Geraden g gegeben, so gibt es zu jedem Paare zugeordneter Punkte $H, \bar{H}$ stets ein und nur ein Paar zugeordneter Punkte $W, \bar{W}$, das zu diesen Punkten $H, \bar{H}$ harmonisch liegt.

Zum Beweise benutzen wir wieder die Gleichung (10) $x \cdot \bar{x} = b < 0$, indem wir die Punkte $H, \bar{H}$ als die Punkte $0, \infty$ ansehen. Nun soll ein Paar entsprechender Punkte $x, \bar{x}$ bestimmt werden, das zu den Punkten $0, \infty$ harmonisch ist. Es muß also

$$(\infty\, 0\, x\, \bar{x}) = -1$$

sein oder gemäß dem Ausdruck (5) S. 104

$$\frac{x}{\bar{x}} = -1$$

oder wegen der Gleichung (10)

$$x^2 = -b > 0,$$

d. h.

$$\left.\begin{matrix} x_0 \\ \bar{x}_0 \end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{-b}.$$

Diese reellen Punkte W, $\overline{W}$ erfüllen also unsere Forderung.

Ist insbesondere das Abszissensystem so gewählt, daß wie bisher die Punkte H, $\overline{H}$ die Abszissen 0, ∞ besitzen, nun aber noch der Punkt W die Abszisse 1 besitzt (Fig. 106), so hat $\overline{W}$ die Abszisse -1; die Gleichung der elliptischen Involution aber lautet jetzt einfach

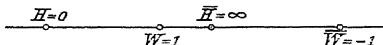



Fig. 106.

$$x \cdot \bar{x} = -1. \tag{10'}$$

13. Eine elliptische Involution können wir nun dem Satze 12 gemäß am einfachsten durch zwei Punktepaare $H, \overline{H}$ und $W, \overline{W}$, die zueinander harmonisch liegen, gegeben denken. Haben diese Punkte bzw. die Abszissen $0, \infty, \pm 1$, so lautet die Gleichung der elliptischen Involution einfach

$$x \cdot \bar{x} = -1,$$

und die Doppelpunkte haben die Abszissen $\pm i$.

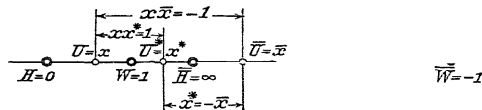
Die *hyperbolische* Involution war nun auch anschaulich leicht zu überblicken, da mit den beiden Doppelpunkten D_1, D_2 nach dem Satze 6 S. 149 zu jedem Punkte die Lage des zugeordneten leicht zu erkennen ist. Wir können aber auch die *elliptische* Involution noch in anderer Weise anschaulicher als bisher erfassen, und zwar auch durch harmonische Verhältnisse reeller Punkte.

Es sei die elliptische Involution durch die beiden zueinander harmonischen Punktepaare $H, \overline{H}$ und $W, \overline{W}$ gegeben (Fig. 107). Wir wollen wieder das Abszissensystem so gewählt denken, daß diese Punkte die Abszissen 0, ∞, $+1$, -1 besitzen. Nach der Gleichung (10′) lautet die Gleichung der elliptischen Involution, wieder

Fig. 107.

$$x \cdot \bar{x} = -1. \tag{10'}$$

Es sei dann U, $\overline{U}$ ein *beliebiges* Paar entsprechender Punkte mit den Koordinaten x, $\bar{x}$; ferner sei der Punkt U^* der vierte harmonische Punkt zu $H, \overline{H}$ und $\overline{U}$. Dann bilden die Punktepaare $\overline{U}$, U^* ja eine hyperbolische Involution mit den Doppelpunkten $H, \overline{H}$. Diese Involution wird gemäß der Gleichung (9) S. 149 durch die Gleichung gegeben

$$x^* = -\bar{x}. \tag{9'}$$

Es hat also der Punkt U^* die Abszisse $x^* = -\bar{x}$, so daß für die Zuordnung der Punkte U, U^* die Gleichung gilt

$$x \cdot x^* = 1\,. \tag{12}$$

Auch die Punkte U, U^* bilden also eine *hyperbolische* Involution, und diese hat als reelle Doppelpunkte die Punkte mit den Abszissen

$$\left.\begin{matrix} x_0 \\ \bar{x}_0 \end{matrix}\right\} = \pm 1, \quad \text{d. h. die Punkte } W, \bar{W}.$$

Also ergibt sich folgender Satz, den wir unabhängig vom Abszissensystem aussprechen können:

14. Eine elliptische Involution sei durch die zueinander harmonischen Punktepaare $H, \bar{H}$ und $W, \bar{W}$ gegeben. Wir lassen nunmehr jedem Punkte U nicht den bisher zugeordneten Punkt $\bar{U}$, sondern den vierten harmonischen Punkt U^* zu $H, \bar{H}, \bar{U}$ entsprechen. Dann ist das Punktentsprechen U, U^* eine hyperbolische Involution mit den Punkten $W, \bar{W}$ als ihren Doppelpunkten.

Fig. 108.

15. Wir finden also bei gegebenen Punktepaaren $H, \bar{H}$ und $W, \bar{W}$ zu einem beliebigen Punkte U den ihm entsprechenden Punkt $\bar{U}$ der elliptischen Involution, indem wir zuerst zu den Punkten W, $\bar{W}$, U den vierten harmonischen Punkt U^* und dann zu $H, \bar{H}$, U^* den vierten harmonischen Punkt $\bar{U}$ bestimmen. (Die Punktepaare $H, \bar{H}$ und $W, \bar{W}$ sind natürlich miteinander gleichwertig, d. h. wir können auch erst zu $H, \bar{H}$, U den vierten harmonischen Punkt U^{**} und dann zu W, $\bar{W}$, U^{**} den vierten harmonischen Punkt $\bar{U}$ bestimmen.)

Durch dieses Resultat ist also die elliptische Involution auf die wegen der reellen Doppelpunkte anschaulichere hyperbolische Involution zurückgeführt.

Unseren gewonnenen Sätzen gemäß können wir nun auch einfachere Konstruktionen für die einander entsprechenden Punkte einer bestimmten hyperbolischen bzw. elliptischen Involution angeben. Es sei eine *hyperbolische* Involution z. B. durch ihre Doppelpunkte D_1, D_2 auf der Geraden g gegeben (Fig. 108). Wir legen nun durch die Punkte D_1, D_2 zwei beliebige Geraden, die sich im Punkte J schneiden. Dann bestimmen wir auf der Geraden $D_2 J$ noch ein beliebiges Punktepaar K, L, das zu dem Punktepaar D_2, J harmonisch liegt, etwa durch eine Viereckskonstruktion. Es sei dann A ein beliebiger Punkt der Geraden g, und es schneide AL die Gerade $D_1 J$ im Punkte O. Dann schneidet OK die Gerade g in dem zu A zugeordneten Punkt $\bar{A}$. Diese Konstruktion wollen wir den *Erzeugungsmechanismus der hyperbolischen In-*

volution nennen. (Denken wir noch die Geraden AK und $\bar{A}L$ gezeichnet, so müssen sich diese in einem Punkte M auf OD_1 schneiden. Die Figur stellt dann das vollständige Viereck $A\bar{A}KL$ dar mit seiner Diagonalen OM.)

Nun sei eine *elliptische* Involution durch die zueinander harmonischen Punktepaare $H, \bar{H}$ und $W, \bar{W}$ der Geraden g gegeben (Fig. 109; *Erzeugungsmechanismus der elliptischen Involution*). Wir konstruieren zunächst die analoge Figur wie soeben, d. h. ein vollständiges Viereck $W\bar{W}KL$, in dem $\bar{H}$ ein Diagonalpunkt und H der Schnitt der dritten Diagonale MO mit $W\bar{W}$ ist. (Wir ziehen etwa zuerst zwei beliebige Geraden durch H und $\bar{H}$, nehmen auf der ersten einen Punkt O an. Dessen Verbindungsgeraden mit $W, \bar{W}$ liefern die Schnittpunkte K, L.) Es sei noch J der Schnittpunkt von KL mit MO und J_1 der Schnittpunkt von WK mit $\bar{W}J$. Um nun zu einem beliebigen Punkte U der Geraden g den zugeordneten Punkt $\bar{U}$ der elliptischen Involution zu finden, verbinden wir U mit K bis zum Schnitt O_1 mit $\bar{W}J$, darauf O_1 mit M bis zum Schnitt U^* mit g, darauf U^* mit L bis zum Schnitt O_2 mit HJ, endlich O_2 mit K bis zum Schnitt $\bar{U}$ mit g.

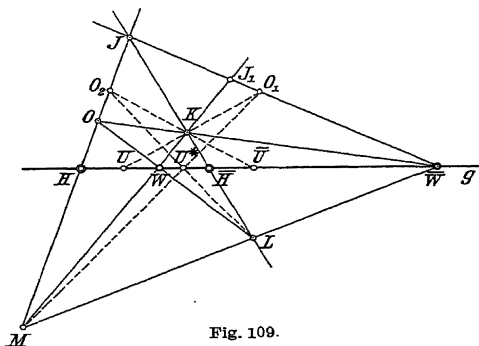



Fig. 109.

Der Beweis folgt auf Grund des Satzes 15 aus den Gleichungen

$$-1 = (H\bar{H}W\bar{W}) = (J\bar{H}LK) = (J_1WMK) = (\bar{W}WU^*U)$$

und

$$-1 = (J\bar{H}LK) = (H\bar{H}U^*\bar{U}).$$

Endlich wollen wir in aller Kürze auf folgende Tatsache hinweisen:

16. Alle unsere Betrachtungen über Involutionen bei einer Punktreihe lassen sich auch auf ein Strahlenbüschel übertragen.

Wir brauchen ja nur die Punktreihe der Geraden g von einem außerhalb gelegenen Punkte M durch ein Strahlenbüschel zu projizieren.

Man kann insbesondere, wenn A, P, E_1 die Punkte $0, \infty, 1$ der als x-Achse auftretenden Geraden g sind, M als Eckpunkt $Q = (0, 1, 0)$ und einen (von E_1, Q verschiedenen) Punkt E der Geraden QE_1 als Einheitspunkt des Fundamentaldreiecks APQ wählen. Dann gelten für die nicht-homogenen Linienkoordinaten u_i der Strahlen des Strahlenbüschels mit dem Träger Q die Beziehungen

$$u_i = -\frac{1}{x_i},$$

wo x_i die Koordinaten für die Punkte der gegebenen Punktreihe sind, während $v_i = 0$ ist. (Vgl. den Satz 2 S. 111.) Die einzelnen Strahlen durch Q sind dann also durch die *eine* Koordinate u_i festgelegt. Hiernach übertragen sich dann leicht alle Formeln, die wir für die Punktreihe benutzt haben, auf das Strahlenbüschel.

Siebenter Abschnitt.

Projektive Theorie der Kegelschnitte.

§ 21. Allgemeine Gleichungsformen für den Kegelschnitt und seine Tangenten.

Wir gehen nun dazu über, die *projektive Theorie der Kegelschnitte* zu gewinnen. Doch wollen wir uns auch hier möglichst beschränken und nur diejenigen wichtigen projektiven Eigenschaften der Kegelschnitte entwickeln, die wir später bei der Darstellung der nichteuklidischen Geometrien gebrauchen.

An die Spitze unserer Betrachtung stellen wir die *Definition:*

1. Ein Kegelschnitt ist allgemein durch die Gleichung zweiten Grades definiert

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{1}$$

oder homogen geschrieben

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dxs + 2Eys + Fs^2 = 0. \tag{1'}$$

Diese Gleichung soll *reelle* Koeffizienten haben. Sie umfaßt ersichtlich auch den Fall, daß der Kegelschnitt in zwei reelle, eine reelle doppelt zählende oder in zwei konjugiert-komplexe Geraden zerfällt. In diesen Fällen zerlegt sich eben die linke Seite der Gleichung (1) in zwei lineare Faktoren. Da es sich bei der Feststellung der Bedingung für diese Fälle nur um *rein algebraische* Betrachtungen handelt, so würde ersichtlich dieselbe Untersuchung durchzuführen sein, wie sie in der analytischen Geometrie der euklidischen Ebene analog durchgeführt wird. Wir können von dort daher sogleich das Resultat entnehmen[1]:

2. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Kegelschnitt in zwei Geraden, die auch zusammenfallen oder konjugiert-imaginär sein können, zerfällt, ist

$$\delta = \begin{vmatrix} A & C & D \\ C & B & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Diese Größe δ nennt man die *Diskriminante* der Kegelschnittsgleichung.

1) Vgl. wegen dieses und der nächsten Sätze z. B. F. Schur, Lehrbuch der analytischen Geometrie, 2. Aufl., Leipzig 1912, etwa S. 95 u. 100.

Wir setzen weiterhin also voraus, da uns nur die eigentlichen d. h. die nicht zerfallenden Kegelschnitte interessieren, *daß diese letzte Gleichung nicht erfüllt ist* ($\delta \neq 0$). *Die Gleichung* (1) *umfaßt dann, wie wir sogleich noch genauer sehen werden, die zwei projektiv verschiedenen Arten von Kegelschnitten, die „einteiligen" und die „nullteiligen" Kegelschnitte*, d. h. die Kegelschnitte mit reellen und die Kegelschnitte ohne reelle Punkte, wie solches ja auch analog in der analytischen Geometrie der euklidischen Ebene der Fall ist. (Als reelle Punkte gelten hier natürlich alle eigentlichen und uneigentlichen Punkte der projektiven Ebene.) Wir brauchen z. B. ja nur die beiden Kurven

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

und

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

anzusehen, den Einheitskreis und den Kreis mit dem Radius i um den Anfangspunkt in der euklidischen Geometrie. Wie in der euklidischen Geometrie gilt auch hier der Satz, der sich auch aus rein algebraischen Betrachtungen ergibt:

3. Ein nicht zerfallender Kegelschnitt ist nullteilig oder einteilig, je nachdem gleichzeitig $C^2 - AB < 0$ und $A \cdot \delta > 0$ ist oder nicht.[1])

Diese Bedingung wollen wir jedoch im folgenden ableiten: Wir brauchen nur zu untersuchen, unter welchen Bedingungen der durch die Gleichung (1) gegebene, nicht zerfallende Kegelschnitt wenigstens einen reellen Punkt besitzt, also einteilig ist, d. h. die Gleichung (1) *durch ein reelles Wertepaar* (x, y) erfüllt ist. Ist $A = 0$, so gehört stets der reelle Punkt $(x, y, s) = (1, 0, 0)$ dem Kegelschnitt an gemäß der Gleichung (1′). Wir können daher jetzt $A \neq 0$ voraussetzen. Wir setzen nun zunächst $y = y_0$, wo y_0 eine noch zu bestimmende reelle Zahl sei. Dann folgt aus der Gleichung (1)

$$A x^2 + 2x(C y_0 + D) = -(B y_0^2 + 2E y_0 + F),$$

woraus sich die beiden Wurzeln ergeben

$$x_{1,2} = -\frac{C y_0 + D}{A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{(C y_0 + D)^2 - (B y_0^2 + 2E y_0 + F)\cdot A}. \qquad (3)$$

Unsere Untersuchung kommt also auf die Frage hinaus: *Gibt es einen reellen Wert y_0, so daß der Radikand*

$$(C y_0 + D)^2 - (B y_0^2 + 2E y_0 + F) A$$
$$= (C^2 - A\cdot B) y_0^2 + 2 y_0 (CD - EA) + (D^2 - FA) \geqq 0 \qquad (4)$$

---

1) Vgl. wegen dieser projektiven Einteilung der Kegelschnitte vor allem auch: Heffter-Koehler, Lehrbuch der analytischen Geometrie I, Karlsruhe 1927, S. 196ff. oder A. Schoenflies, Einführung in die analytische Geometrie, Berlin, 1925, S. 148.

ist? Ist zunächst $(C^2 - A \cdot B) \geqq 0$, so ist die Frage zu bejahen. Denn für $(C^2 - A \cdot B) > 0$ bestimmt für absolut hinreichend große (positive oder negative) Zahlen y_0 das erste Glied $(C^2 - A \cdot B) \cdot y_0^2$, das positiv ist, das Vorzeichen des ganzen Ausdrucks. Und für $(C^2 - A \cdot B) = 0$ bestimmt das zweite Glied $2 y_0 (CD - EA)$ für absolut hinreichend große Zahlen y_0 das Vorzeichen des ganzen Ausdrucks; je nachdem $(CD - EA) \gtrless 0$ ist, ist aber für positive bzw. negative Zahlen y_0 dieses zweite Glied dann positiv.

Wir haben nur noch den Fall $C^2 - AB < 0$ zu untersuchen. Statt der Ungleichung (4) können wir nun die folgende betrachten:

$$y_0^2 + 2 y_0 \frac{CD - EA}{C^2 - A \cdot B} + \frac{D^2 - F \cdot A}{C^2 - A \cdot B} \leqq 0, \tag{5}$$

wobei wir wieder zu fragen haben: Gibt es einen reellen Wert y_0, so daß diese Ungleichung befriedigt wird?

Für absolut hinreichend große, positive oder negative Werte y_0 wird der Ausdruck auf der linken Seite der Ungleichung (5) sicher positiv und $+\infty$ für $\lim y_0 = \pm\infty$. Der Wert y_0, für welchen dieser Ausdruck den *kleinsten* Wert annimmt, ergibt sich also durch Differentiation als

$$y_0 = -\frac{CD - EA}{C^2 - AB}.$$

Unsere obige Frage ist nun stets und nur dann zu bejahen, wenn für diesen Wert die Ungleichung (5) erfüllt wird, d. h. wenn

$$(CD - EA)^2 - 2(CD - EA)^2 + (D^2 - FA)(C^2 - AB) \leqq 0$$

ist. Diese Ungleichung ist aber leicht in die folgende überzuführen:

$$A \cdot \delta \leqq 0.$$

Hiermit ist aber der Satz 3 bewiesen.

Wir wollen noch hinzufügen:

4. Wenn der nicht zerfallende Kegelschnitt einteilig ist, d. h. wenigstens einen reellen Punkt A_0 hat, so muß er beliebig viele reelle Punkte besitzen.

Wir können (durch eine lineare Transformation der Koordinaten) ein neues Koordinatensystem so eingeführt denken, daß dessen Anfangspunkt der Punkt A_0 ist. Die neuen Koordinaten seien dann wieder mit (x, y, s) bezeichnet, so daß die Gleichung (1′) gilt. Da die Gleichung für $(x, y, s) = (0, 0, 1)$ erfüllt sein soll, so muß $F = 0$ sein. Die Schnittpunkte der x-Achse (mit der Gleichung $y = 0$) werden dann gegeben durch die Gleichung

$$A x^2 + 2D\, xs = 0$$

oder durch die beiden Gleichungen $\quad x = 0,$

$$A x + 2D s = 0.$$

Sollten *beide* Gleichungen nun die Werte $(x, s) = (0, 1)$ ergeben, so müßte $D = 0$ sein. Analog ergäbe die Forderung, daß auch die y-Achse den Kegelschnitt nicht in einem vom Punkte $(0, 0, 1)$ verschiedenen Punkte schnitte, daß auch $E = 0$ sein müßte. Wenn aber $D = E = F = 0$ ist, so ist auch $\delta = 0$, d. h. der Kegelschnitt könnte nicht ein nicht zerfallender sein. Da nun die (x, y)-Achsen noch *beliebige* Geraden durch den Punkt A sind, so folgt also:

5. *Höchstens für eine Gerade durch den Punkt A_0 (die Tangente von A_0) fallen die beiden Schnittpunkte mit dem einteiligen Kegelschnitt im Punkte A_0 zusammen.*

Daß ein *nullteiliger* Kegelschnitt von jeder *beliebigen* (reellen) Geraden in zwei konjugiert-imaginären Punkten geschnitten wird, ist ohne weiteres klar.

Die Unterscheidung der einteiligen Kegelschnitte in Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln, wie sie die analytische Geometrie dann noch aufstellt, betrifft ja das Verhalten der Kurven zu der unendlich fernen Geraden der euklidischen Ebene; diese Unterscheidung findet hier bei unserem rein projektiven Standpunkt, wo vom Parallelenaxiom noch gar keine Rede ist, natürlich keinen Platz.

Wohl aber können wir sogleich der analytischen Geometrie der euklidischen Ebene, da es sich wieder um *rein algebraische* Betrachtungen handelt, die folgenden projektiven Sätze und Definitionen entnehmen:

6. *Die Tangente in einem Punkte x_0, y_0 des Kegelschnitts, d. h. die Gerade, welche den Kegelschnitt nur in dem doppelt zählenden Punkte x_0, y_0 schneidet, wird durch die Gleichung*

$$A x x_0 + B y y_0 + C(x y_0 + y x_0) + D(x + x_0) + E(y + y_0) + F = 0 \qquad (6)$$

gegeben, wo natürlich x_0, y_0 der Kegelschnittsgleichung genügen.

7. *Die Kegelschnitte sind Kurven 2. Ordnung, d. h. sie werden von einer beliebigen Geraden stets in zwei (reellen getrennten oder zusammenfallenden oder konjugiert imaginären) Punkten geschnitten.*

8. *Die Kegelschnitte sind Kurven 2. Klasse, d. h. von einem beliebigen Punkte lassen sich stets zwei (reelle getrennte oder zusammenfallende oder konjugiert imaginäre) Tangenten an die Kurve ziehen.*

9. *Die Gesamtheit der Punkte, von denen sich zwei reelle bzw. zwei konjugiert imaginäre Tangenten an den Kegelschnitt legen lassen, bezeichnen wir als das Äußere bzw. als das Innere des Kegelschnitts.*

§ 22. Die spezielle Gleichungsform $x^2 + y^2 - 1 = 0$ für einen einteiligen Kegelschnitt.

Wir wollen nun eine *spezielle Gleichungsform* für einen beliebig gegebenen Kegelschnitt, den wir als *einteilig* voraussetzen, ableiten. Der Kegelschnitt sei zunächst durch die Gleichung (1) S. 154 gegeben. Dann aber wollen wir ein neues Koordinatensystem einführen. Das zugehörige neue Fundamentaldreieck mit seinem Einheitspunkt sei wie folgt gewonnen:

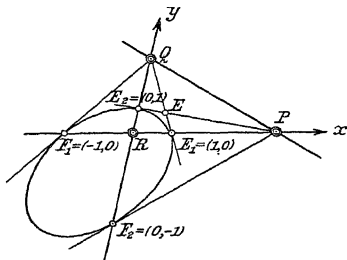
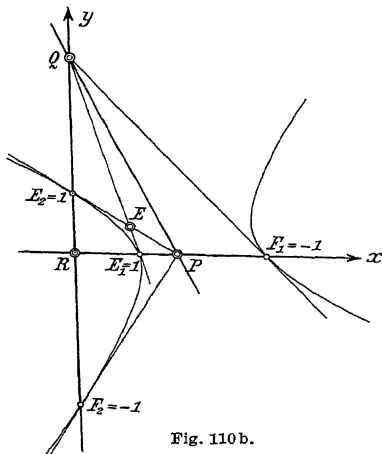



Fig. 110 a.

Fig. 110 b.

Wir gehen aus (Fig. 110 a; in der Fig. 110 b ist noch eine andere solche Figur gegeben, in der der vor uns liegende Teil anders aussieht) von einer beliebigen Sekante des Kegelschnitts mit den reellen Schnittpunkten E_1, F_1 und ihren Tangenten, die sich in dem Punkte Q schneiden. Ein von E_1, F_1 verschiedener Punkt E_2 des Kegelschnitts sei dann mit Q verbunden. QE_2 kann keine Tangente des Kegelschnitts sein, da von Q ja nur zwei Tangenten, eben die Geraden QE_1 und QF_1, möglich sind. F_2 sei der zweite Schnittpunkt der Geraden QE_2 mit dem Kegelschnitt und R der Schnittpunkt der Geraden QE_2 und E_1F_1. Endlich sei P der vierte harmonische Punkt zu E_1, F_1 und R. Wir wählen nun PQR als neues Fundamentaldreieck mit dem früher A genannten Anfangspunkte R und dem Schnittpunkt E der Geraden QE_1 und PE_2 als Einheitspunkt und bezeichnen die neuen projektiven homogenen Koordinaten mit $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. Durch die nun geltenden Transformationsformeln (1) S. 119 oder besser ihre Umkehrung (13) S. 125 geht nun die gegebene Gleichung (1) S. 154 unseres Kegelschnitts ersichtlich in die analoge (ebenfalls unhomogen geschriebene) Gleichung

$$\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{B}\bar{y}^2 + 2\bar{C}\bar{x}\bar{y} + 2\bar{D}\bar{x} + 2\bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0$$

über, für die auch die Determinante

$$\bar{\delta} = \begin{vmatrix} \bar{A} & \bar{C} & \bar{D} \\ \bar{C} & \bar{B} & \bar{E} \\ \bar{D} & \bar{E} & \bar{F} \end{vmatrix} \neq 0$$

sein muß. Es ist übrigens durch direkte Berechnung unschwer zu zeigen, daß

$$\bar{\delta} = \delta \cdot \Delta^2$$

ist, wo Δ die Determinante (2) S. 119 der Transformation ist.

Diese neue Kegelschnittgleichung muß aber eine wesentlich einfachere Form besitzen. Wir wollen im folgenden der Einfachheit halber die neuen Koordinaten wieder mit x, y, s bezeichnen und auch bei den Koeffizienten $\bar{A}, \bar{B}$ .. den Strich fortlassen, so daß wir wieder die Gleichung (1) S. 154 vor uns sehen.

Der Punkt E_1 hat nun die Koordinaten $(+1, 0)$, der Punkt F_1, da das Doppelverhältnis $(R P E_1 F_1) = (0 \infty 1 F_1) = -1$ ist, die Koordinaten $(-1, 0)$ und der Punkt E_2 die Koordinaten $(0, +1)$, während die Tangenten QE_1 und QF_1 die Gleichungen $x = \pm 1$ besitzen. Da nun die Punkte $(\pm 1, 0)$ der Gleichung (1) S. 154 genügen, so ergibt diese Gleichung für $x = \pm 1$, $y = 0$

$$A \pm 2D + F = 0$$

oder

$$D = 0$$

und

$$F = -A.$$

Die Gleichung (1) S. 154 lautet also jetzt

$$A x^2 + B y^2 + 2 C x y + 2 E y - A = 0. \tag{1'}$$

Da auch $E_2 = (0, 1)$ ein Kegelschnittspunkt ist, so ergibt die Gleichung (1′) für $x = 0$, $y = 1$ weiter

$$B + 2E - A = 0$$

oder

$$E = \frac{A - B}{2}.$$

Die Gleichung (1′) geht also über in

$$A x^2 + B y^2 + 2 C x y + (A - B) y - A = 0. \tag{1''}$$

Die allgemeine Tangentengleichung

$$A x x_0 + B y y_0 + C(x y_0 + y x_0) + \frac{A - B}{2}(y + y_0) - A = 0$$

ergibt nun für $x_0 = \pm 1$, $y_0 = 0$ die Gleichungen

$$\pm A x \pm C y + \frac{A - B}{2} y - A = 0.$$

Diese Gleichungen müssen aber mit den Gleichungen

$$x = \pm 1$$

identisch sein, d. h. es muß $C = 0$ und $A = B$ sein. Somit nimmt endlich die Gleichung (1″), da $A \neq 0$ sein muß wegen des Satzes (2) S. 154, die Form an

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad \text{d. h.} \tag{2}$$

1. Durch Benutzung eines wie angegeben gewählten Koordinatensystems wird jeder einteilige Kegelschnitt durch diese Gleichung (2) *dargestellt.*

Diese Gleichung (2) hat übrigens dieselbe Form wie die Gleichung des Einheitskreises in der analytischen Geometrie der euklidischen Ebene.

Man erkennt sofort noch weiter aus der Gleichung (2):

2. Der Punkt F_2 des Kegelschnitts auf der y-Achse hat die Koordinaten $x = 0$, $y = -1$ und die Tangenten in den Punkten E_2, F_2 haben die Gleichungen $y = \pm 1$, *sind also die Geraden PE_2 und PF_2 der Figuren* 110a, b.

Für homogene Koordinaten x, y, s geht die Gleichung (2) über in

$$x^2 + y^2 - s^2 = 0. \tag{2a}$$

Die Gleichung einer Tangente im Punkte (x_0, y_0) des Kegelschnitts lautet also

$$x x_0 + y y_0 - s s_0 = 0.$$

Die homogenen Linienkoordinaten der Tangente sind dann

$$u = x_0,$$
$$v = y_0,$$
$$t = -s_0.$$

Nun genügen die Koordinaten x_0, y_0, s_0 der Kegelschnittsgleichung (2a). Also gilt auch

$$u^2 + v^2 - t^2 = 0, \quad \text{d. h.} \tag{3}$$

3. Die Linienkoordinaten der Tangenten des Kegelschnitts genügen dieser Gleichung (3). Wir sagen mit anderen Worten:

3a. Die Gleichung (3) *ist die Gleichung des Kegelschnittes in Linienkoordinaten.*

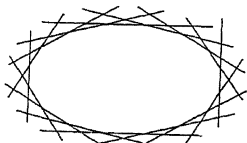



Fig. 111.

Hierbei ist dann also der Kegelschnitt als Umhüllungsgebilde, als Enveloppe aller Tangenten aufgefaßt (Fig. 111). Man nennt die Gleichung (3) auch die *Dualform* der Gleichung (2a).

Aus unserer Betrachtung folgt ferner noch der Satz:

4. Es gibt stets einen und nur einen Kegelschnitt, der durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte E_1, F_1, E_2 geht und zwei Geraden E_1Q, F_1Q, die nicht auch durch E_2 gehen, in den Punkten E_1, F_1 berührt.

Denn die soeben durchgeführte Rechnung führt dann notwendig zu der Gleichung (2) hin.

§ 23. Die spezielle Gleichungsform $x^2 + y^2 + 1 = 0$ für einen nullteiligen Kegelschnitt.

Wir wollen uns nunmehr auch der Betrachtung der *nullteiligen* Kegelschnitte zuwenden. Es gilt hier der den Sätzen 1 und 3 S. 160 analoge Satz:

1. Bei Einführung eines zweckmäßigen Koordinatensystems wird jeder nullteilige Kegelschnitt durch die Gleichung in Punktkoordinaten

(1) $$x^2 + y^2 + 1 = 0 \quad \textit{bzw.} \quad x^2 + y^2 + s^2 = 0$$ (1′)

und durch die zugeordnete Gleichung in Linienkoordinaten

(2) $$u^2 + v^2 + 1 = 0 \quad \textit{bzw.} \quad u^2 + v^2 + t^2 = 0$$ (2′)

dargestellt.

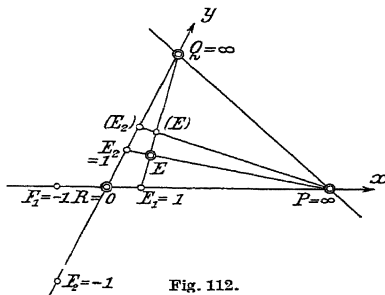
Auf den Beweis dieses Satzes wollen wir jetzt eingehen:

Fig. 112.

Wir gehen aus von einer beliebigen reellen Sekante des Kegelschnittes (Fig. 112); diese schneidet ihn in zwei konjugiert imaginären Punkten $S, \bar{S}$. Diese Punkte können wir auch durch eine elliptische Involution dargestellt denken. Diese Involution sei nach dem Satze 13 S. 151 durch zwei Paare zugeordneter reeller Punkte E_1, F_1 und P, R bestimmt, die zueinander harmonisch sind. Die Tangenten des Kegelschnittes in den konjugiert-imaginären Punkten S, $\bar{S}$ sind auch konjugiert-imaginäre Geraden und haben als solche einen reellen Schnittpunkt Q. (Die Tangenten in den Punkten $S, \bar{S}$ haben ja in dem ursprünglichen Koordinatensystem zwei Gleichungen in der Art der Gleichung (6) S. 157, in denen die Koeffizienten x_0, y_0 das eine Mal durch $x_0' + i x_0''$, $y_0' + i y_0''$, das andere Mal durch $x_0' - i x_0''$, $y_0' - i y_0''$ darstellbar sind. Durch Addition und Subtraktion ergeben sich die zwei notwendig voneinander verschiedenen neuen Gleichungen mit reellen Koeffizienten

$$A x x_0' + B y y_0' + C(x y_0' + y x_0') + D(x + x_0') + E(y + y_0') + F = 0,$$
$$A x x_0'' + B y y_0'' + C(x y_0'' + y x_0'') + D x_0'' + E y_0'' = 0,$$

die dann die Koordinaten des reellen Schnittpunktes Q liefern.)

Wir ziehen dann weiter die reelle Sekante QR, welche den Kegelschnitt wieder in zwei konjugiert-imaginären Punkten $T, \bar{T}$ schneidet. Auf der Geraden QR wählen wir zunächst noch willkürlich einen von Q, R verschiedenen

Punkt (E_2); es sei dann noch (E) der Schnittpunkt der Geraden QE_1 und $P(E_2)$. Wir führen nun zunächst folgendes neue (x, y)-Koordinatensystem ein: Es sei PQR das Fundamentaldreieck mit R als Anfangspunkt und mit (E) als zugehörigem Einheitspunkt. Es hat dann F_1, da $(RPE_1F_1) = -1$ ist, die Abszisse $x = -1$ und die Doppelpunkte der elliptischen Involution $x \cdot \bar{x} = -1$, in der $0, \infty$ sowie ± 1 entsprechende Punkte sind, haben die Abszissen $x = \pm i$. (Dies folgt aus dem Satze 13 S. 151.) Die Kegelschnittstangenten in den Punkten $x_0 = \pm i$, $y_0 = 0$ lauten dann ersichtlich einfach $x = \pm i$, da ja die Tangenten durch den Punkt Q gehen.

Die Kegelschnittsgleichung

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

muß nun für $x = \pm i$, $y = 0$ befriedigt sein, d. h. es ist

$$-A \pm D \cdot i + F = 0$$

oder

$$D = 0,$$

$$F = A.$$

Die Kegelschnittsgleichung nimmt also die Form an

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Ey + A = 0.$$

Die allgemeine Tangentengleichung

$$Axx_0 + Byy_0 + C(xy_0 + yx_0) + E(y + y_0) + A = 0$$

nimmt ferner für $x_0 = \pm i$, $y_0 = 0$ die Formen an

$$\pm A \cdot ix \pm C \cdot iy + Ey + A = 0.$$

Diese Gleichungen müssen aber mit den Gleichungen $x = \pm i$ identisch sein; d. h. es muß weiter

$$C = E = 0$$

sein. Dann lautet die Kegelschnittsgleichung jetzt

$$Ax^2 + By^2 + A = 0.$$

Die Determinante (2) S. 154 der Koeffizienten lautet jetzt

$$\delta = A^2 \cdot B \neq 0.$$

Es müssen also jetzt die Koeffizienten A, B beide von 0 verschieden sein. Wir können daher noch $A = 1$ setzen, so daß unsere letzte Gleichung übergeht in die Gleichung

$$x^2 + By^2 + 1 = 0.$$

Die Kegelschnittspunkte auf der y-Achse sind jetzt also die Punkte

$$y = \frac{1}{\sqrt{B}} \cdot i,$$

so daß $B > 0$ ist. Nun aber wollen wir noch eine Koordinatentransformation vornehmen. Es soll an Stelle des Punktes $(E_2) = (0, 1)$ der Punkt E_2 mit den alten Koordinaten $\left(0, \frac{1}{\sqrt{B}}\right)$ treten. Es bleibt also das Fundamentaldreieck PQR dasselbe, nur der Einheitspunkt (E) ist durch den neuen Einheitspunkt E, den Schnitt von QE_1 und PE_2, ersetzt (Fig. 112 S. 161). Bezeichnen wir die neuen Koordinaten mit $\bar{x}$, $\bar{y}$, so gilt einfach die Transformation

$$x = \bar{x},$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{B}} \cdot \bar{y}.$$

Dann lautet also unsere Kegelschnittsgleichung in dem neuen $(\bar{x}, \bar{y})$-Koordinatensystem

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 1 = 0.$$

Diese neuen Koordinaten wollen wir aber wieder mit x, y bezeichnen, so daß wir in der Tat die Gleichung (1) S. 161 erhalten haben, zu der dann wieder als Polarform die Gleichung (2) gehört.

Wir bemerken sogleich jetzt noch folgendes: Auf der y-Achse haben die imaginären Schnittpunkte des Kegelschnittes, analog wie auf der x-Achse, die Ordinaten $y = \pm i$ und sind als Doppelpunkte der elliptischen Involution $y \cdot \bar{y} = -1$ gegeben, die durch die harmonischen Punktepaare R, Q und E_2, F_2, d. h. durch die Punktepaare $0, \infty$ und ± 1, bestimmt ist. Die Tangenten der Punkte $(0, \pm i)$ sind aber durch die konjugiert-imaginären Geraden $y = \pm i$ oder $y = \pm i \cdot s$ gegeben, deren reeller Schnittpunkt der Punkt $P = (1, 0, 0)$ ist.

Übrigens werden alle diese Betrachtungen später durch die *Polarentheorie* (§ 30) eine hellere Beleuchtung erfahren; insbesondere werden wir dann die *reelle* Bedeutung des nullteiligen Kegelschnittes klar erkennen. Schon jetzt aber wissen wir, daß ein nullteiliger Kegelschnitt auf jeder Geraden der projektiven Ebene eine elliptische Involution bestimmt.

Es sei hier auch schon angedeutet, daß für den Aufbau der hyperbolischen bzw. der elliptischen Geometrie die Theorie des einteiligen bzw. des nullteiligen Kegelschnittes von ganz grundlegender Bedeutung sein wird (vgl. den Satz 10 S. 17).

§ 24. Die spezielle Gleichungsform $x \cdot y = 1$ für einen einteiligen Kegelschnitt.

Wir wollen nun noch eine andere *spezielle Gleichungsform* für einen beliebig gegebenen *einteiligen* Kegelschnitt ableiten:

Wir gehen aus von drei Punkten des einteiligen Kegelschnittes P, Q, E und den Tangenten in zweien derselben, den Tangenten PR und QR in den Punkten

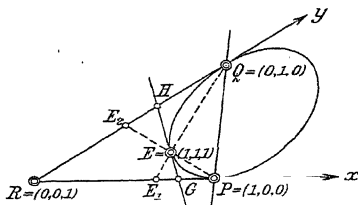



Fig. 113.

P, Q (Fig. 113). Nach dem Satze 4 S. 160 ist durch diese Stücke der Kegelschnitt ja bestimmt. Wir wählen nun das Dreieck RPQ als Fundamentaldreieck, RP und RQ als (x, y)-Achsen und E als den Einheitspunkt. (Wir nennen ein solches Dreieck RPQ ein *Tangentialdreieck* des Kegelschnittes.)

Wir gehen nun aus von der allgemeinen Gleichungsform (1') S. 154 des Kegelschnittes in homogenen Koordinaten x, y, s:

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dxs + 2Eys + Fs^2 = 0.$$

Für den Punkt $P = (1, 0, 0)$ folgt nun

$$A = 0$$

und für den Punkt $Q = (0, 1, 0)$ $\qquad B = 0.$

Also bleibt die Gleichungsform

$$2Cxy + 2Dxs + 2Eys + Fs^2 = 0.$$

Die Gleichung der Tangente in einem Punkte (x_0, y_0, s_0) lautet jetzt

$$C(xy_0 + yx_0) + D(xs_0 + sx_0) + E(ys_0 + sy_0) + Fss_0 = 0,$$

also für die Tangente des Punktes $P = (x_0, y_0, s_0) = (1, 0, 0)$

$$Cy + Ds = 0.$$

Diese Gleichung soll identisch sein mit $y = 0$, d. h. es gilt

$$D = 0.$$

Analog ergibt die Tangente $x = 0$ des Punktes Q

$$E = 0.$$

Also nimmt die Kegelschnittsgleichung jetzt die Form an

$$2Cxy + Fs^2 = 0.$$

Endlich soll diese Gleichung erfüllt sein für den Punkt $E = (1, 1, 1)$, d. h. es muß

$$2C = -F$$

sein. Die Diskriminante der Kegelschnittsgleichung ist jetzt

$$\delta = \begin{vmatrix} A & C & D \\ C & B & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{F}{2} & 0 \\ -\frac{F}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F \end{vmatrix} = -\frac{F^3}{4} \neq 0$$

d. h. es muß $F \neq 0$ sein. Wir können dann auch $F = 1$ setzen und erhalten endlich die Gleichung

$$x \cdot y - s^2 = 0, \quad \text{d. h.} \tag{1}$$

1. Jeder einteilige Kegelschnitt erhält bei der Wahl eines Tangentialdreiecks als Fundamentaldreieck und eines beliebigen dritten Kegelschnittspunktes E als Einheitspunkt die einfache Gleichung

$$x \cdot y = s^2$$

oder inhomogen

$$x \cdot y = 1. \tag{1'}$$

(Vgl. die Gleichung $x \cdot y = 1$ einer Hyperbel in der analytischen Geometrie der euklidischen Ebene.)

Die Gleichung einer beliebigen Tangente in einem Kegelschnittspunkte (x_0, y_0, s_0) ist also gemäß der Gleichung (6) S. 157

$$(x y_0 + y x_0) - 2 s s_0 = 0. \tag{2}$$

Die Linienkoordinaten dieser Tangente sind demnach

$$u = y_0,$$
$$v = x_0,$$
$$t = -2 s_0.$$

Da x_0, y_0, s_0 der Kegelschnittsgleichung genügen, ergibt sich also:

2. Die Dualform der Kegelschnittsgleichung (1), *d. h. die Gleichung des Kegelschnittes in Linienkoordinaten, lautet*

$$4uv - t^2 = 0. \tag{3}$$

Wir denken in der Fig. 113 noch die Tangente des Punktes E hinzugefügt mit den Schnittpunkten G, H auf den (x, y)-Achsen. Die Gleichung dieser Tangente lautet ja nach der Gleichung (2)

$$x + y - 2s = 0.$$

Die Punkte G, H haben demnach die Koordinaten (2, 0, 1) und (0, 2, 1), und die Gerade GH hat die Linienkoordinaten (1, 1, — 2).

Wir können nun ein neues $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$-Koordinatensystem einführen (Fig. 114) durch die Koordinatentransformation

$$\varrho^* \cdot x = -2\bar{x},$$
$$\varrho^* \cdot y = -2\bar{y},$$
$$\varrho^* \cdot s = \bar{s}.$$

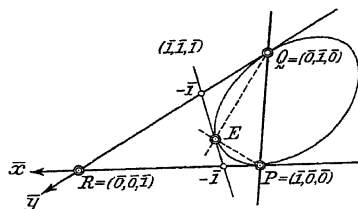



Fig. 114.

Das neue Koordinatensystem hat dasselbe Fundamentaldreieck PQR mit dem Anfangspunkt R; der neue Einheitspunkt $\bar{E}$ wird jedoch durch den Punkt mit den alten Koordinaten $(x, y, s) = (-2, -2, 1)$ gegeben. Es ist dann aber die Tangente des Punktes E die neue *Einheitsgerade* (vgl. die Fig. 87 S. 111)

$$\bar{x} + \bar{y} + \bar{s} = 0 \quad \text{oder} \quad (\bar{u}, \bar{v}, \bar{t}) = (1, 1, 1).$$

Die Gleichung (1) geht dann über in die Gleichung

$$4\bar{x}\bar{y} - \bar{s}^2 = 0 \tag{1''}$$

und die Gleichung (3) in die Gleichung

$$\bar{u} \cdot \bar{v} - \bar{t}^2 = 0, \tag{3'}$$

also in die analoge Gleichungsform in Linienkoordinaten, wie die Gleichung (1) in Punktkoordinaten. Ebenso wie also bei der Gleichung (1) der Einheitspunkt des (x, y, s)-Koordinatensystems ein Kegelschnittspunkt ist, ist jetzt bei der Gleichung (3′) die Einheitsgerade des $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$-Koordinatensystems eine Kegelschnittstangente.

Bei der Benutzung der Gleichung (3′) anstatt der Gleichung (3) würde also auch äußerlich die Dualität der Verhältnisse noch deutlicher zutage treten, auch in der späteren Rechnung. Doch wollen wir gleichwohl später die Gleichung (3) vorziehen.

§ 25. Die projektive Erzeugung der einteiligen Kegelschnitte als Punktreihen bzw. Strahlenbüschel 2. Ordnung.

Zunächst wollen wir noch einige aus der projektiven Verwandtschaft in der Ebene (§ 17) fließenden Betrachtungen ausführen. Wir stellen folgende *Definition* auf:

1. Zwei Strahlenbüschel mit den verschiedenen Trägern P, Q sind projektiv aufeinander bezogen (oder projektiv verwandt oder kurz zueinander projektiv), wenn je vier Strahlen des einen Büschels vier Strahlen des anderen mit demselben Doppelverhältnis entsprechen.

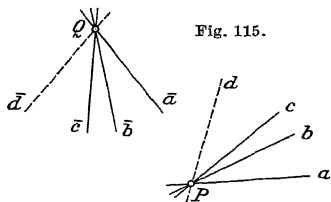



Fig. 115.

Es gilt dann sogleich der Satz:

2. Die projektive Beziehung zweier Strahlenbüschel aufeinander (oder die Projektivität zweier Strahlenbüschel) ist durch zwei Tripel entsprechender Strahlen a, b, c und $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ festgelegt (Fig. 115).

Denn es entsprechen sich dann ja je zwei vierte Strahlen $d, \bar{d}$ so, daß ihre Doppelverhältnisse mit den beiden gegebenen Tripeln dieselben sind.

Doch haben wir noch den durch die folgende *Definition* festgelegten speziellen Fall der Projektivität zweier Strahlenbüschel zu erwähnen:

3. Entspricht bei zwei projektiven Strahlenbüscheln die Verbindungslinie PQ ihrer Träger sich selbst, so nennt man die Strahlenbüschel speziell zueinander „perspektiv".

Es seien zwei solche perspektive Strahlenbüschel in der Fig. 116 durch die beiden Tripel entsprechender Strahlen a, b, c und $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ festgelegt, wo $a = \bar{a}$ ist. Ferner seien B, C die Schnittpunkte von b und $\bar{b}$ bzw. von c und $\bar{c}$. Jetzt müssen ja auch zwei beliebige einander zugeordnete Strahlen d, $\bar{d}$ sich auf der Geraden $BC = g$ schneiden, da dann ja gerade

$$(abcd) = (ABCD) = (\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d})$$

ist. Somit ergibt sich der Satz:

Fig. 116.

4. Der geometrische Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier perspektiver Strahlenbüschel ist ein in zwei Geraden zerfallender Kegelschnitt, nämlich die Gerade $BC = g$ und die Gerade PQ der Fig. 116.

Hierbei ist eben zu beachten, daß der Schnittpunkt der zusammengefallenen Strahlen a, $\bar{a}$ unbestimmt ist.

In dualer Weise stellen wir nun die weitere *Definition* und den sich anschließenden Satz auf:

5. Zwei Punktreihen mit verschiedenen Trägern p, q sind zueinander projektiv, wenn je vier Punkte der einen Punktreihe vier Punkten der anderen mit demselben Doppelverhältnis entsprechen.

6. Die Projektivität zweier Punktreihen ist durch zwei Tripel entsprechender Punkte A, B, C und $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ festgelegt (Fig. 117).

Fig. 117.

Es seien nun auf den beiden Trägern p, q zwei $(x, \bar{x})$-Abszissensysteme festgelegt. Dann wird die Projektivität gemäß dem Ausdruck (5) S. 104 durch die Gleichung gegeben

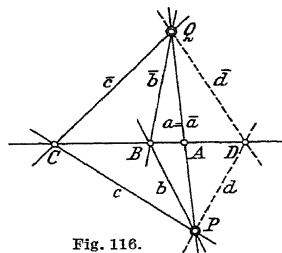
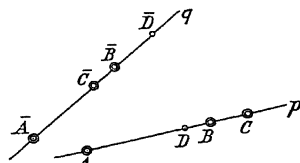
$$(\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}) = (x_1 x_2 x_3 x) \tag{1}$$

oder

$$\frac{\bar{x}_3 - \bar{x}_1}{\bar{x}_2 - \bar{x}_3} : \frac{\bar{x} - \bar{x}_1}{\bar{x}_2 - \bar{x}} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} : \frac{x - x_1}{x_2 - x},$$

wo x_i, $\bar{x}_i$ die beiden gegebenen Punktetripel A, B, C und $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ sind. Diese Gleichung läßt sich aber auch in die Form

$$\bar{x} = \frac{ax + b}{cx + d} \tag{2}$$

überführen (vgl. die Definition 1 S. 113 und die sich anschließende Betrachtung). Sind die Abszissensysteme insbesondere so gewählt, daß die Punkte

x_1, x_2, x_3 wie auch die Punkte $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ speziell die Abszissen $\infty, 0, 1$ besitzen, so lautet die Gleichung (1) einfach

$$(\bar{\infty}\ \bar{0}\ \bar{1}\ \bar{x}) = (\infty\ 0\ 1\ x)$$

oder

$$\bar{x} = x. \tag{3}$$

Auch hier gilt weiter die spezielle *Definition:*

7. *Entspricht bei zwei projektiven Punktreihen der Schnittpunkt ihrer Träger p, q sich selbst, so nennt man die Punktreihen zueinander „perspektiv".*

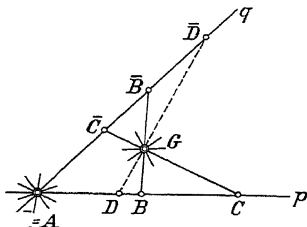



Fig. 118.

Es seien zwei solche perspektive Punktreihen p, q durch die beiden Tripel entsprechender Punkte A, B, C und $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ festgelegt, wo $A = \bar{A}$ ist (Fig. 118). Ferner sei G der Schnittpunkt von $B\bar{B}$ und $C\bar{C}$. Wir erkennen dann leicht den zum Satze 4 dualen Satz:

8. *Der geometrische Ort der Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier perspektiver Punktreihen besteht aus zwei Strahlenbüscheln mit den Trägern G und A.*

Hierbei ist eben wieder zu beachten, daß die Verbindungslinie der zusammenliegenden Punkte $A = \bar{A}$ unbestimmt ist.

Nach diesen Vorbereitungen kehren wir nun zu der *Gleichungsform* (1) *S. 165 für den einteiligen Kegelschnitt* zurück. Aus ihr werden wir sogleich wichtige Eigenschaften des einteiligen Kegelschnittes gewinnen. In der die Fig. 113 S. 164 ergänzenden Fig. 119 haben die drei Strahlen PR, PQ und PE durch P die Gleichungen

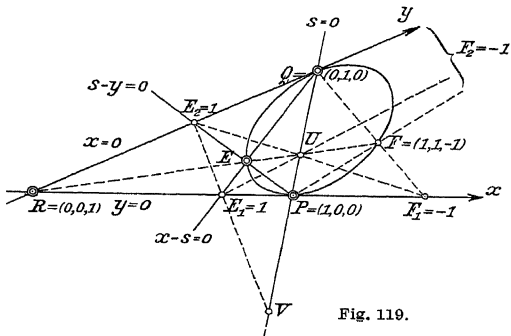



Fig. 119.

$$y = 0, \quad s = 0, \quad s - y = 0$$

und die drei Strahlen QP, QR und QE durch Q die Gleichungen

$$s = 0, \quad x = 0, \quad x - s = 0.$$

(In der Fig. 119a ist wieder noch eine andere solche Figur gegeben, in der der vor uns liegende Teil anders aussieht.)

Wir wollen nun die beiden Strahlenbüschel mit den Trägern P, Q projektiv so aufeinander beziehen, daß die genannten beiden Tripel von Strahlen einander entsprechen. Wir behaupten zunächst:

9. Diese projektive Verwandtschaft der beiden Strahlenbüschel (P) und (Q) wird durch die Gleichungen festgelegt

$$\left.\begin{aligned} s - \lambda y = 0, \\ x - \lambda s = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{a, b})$$

die eben für beliebige reelle Werte λ die einander entsprechenden Strahlen darstellen.

Die drei bereits genannten Strahlenpaare ergeben sich hieraus für $\lambda = \infty$ bzw. 0 oder 1. Wir erkennen auch leicht, daß für jeden beliebigen Wert λ die Gleichung (4a) einen Strahl durch $P = (1, 0, 0)$, die Gleichung (4b) einen entsprechenden Strahl durch $Q = (0, 1, 0)$ darstellt. Zum Beweise des Satzes 9 haben wir dann nur den folgenden Satz nachzuweisen:

Fig. 119 a.

10. Je vier Strahlen durch P haben dasselbe Doppelverhältnis wie die vier entsprechenden Strahlen durch Q.

Die Schnittpunkte der Strahlen durch P mit der y-Achse haben nun die Ordinaten

$$\frac{y}{s} = \frac{1}{\lambda}$$

und die Schnittpunkte der Strahlen durch Q mit der x-Achse die Abszissen

$$\frac{x}{s} = \lambda;$$

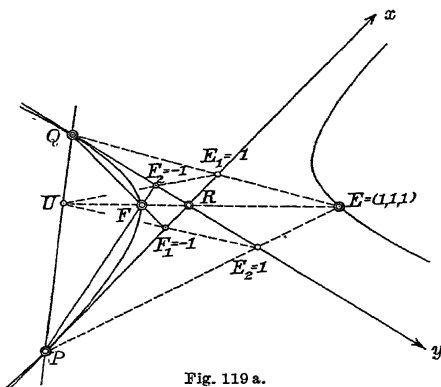
d. h. die (x, y)-Achsen selbst sind analog den gleichen Werten λ entsprechend einander punktweise zugeordnet durch die lineare Beziehung

$$\frac{y}{s} = \frac{s}{x}$$

oder unhomogen
$$y = \frac{1}{x}.$$

Sind nun zwei entsprechende Strahlenquadrupel mit den Trägern P bzw. Q gegeben, so sind ihre Doppelverhältnisse (nach dem Satze 13 S. 128) bzw. durch die Doppelverhältnisse ihrer Schnittpunkte y_i bzw. x_i mit der y- bzw. x-Achse gegeben. Es ist aber ersichtlich

$$(y_1\, y_2\, y_3\, y_4) = \left(\frac{1}{x_1}\ \frac{1}{x_2}\ \frac{1}{x_3}\ \frac{1}{x_4}\right) = (x_1\, x_2\, x_3\, x_4),$$

womit die Sätze 9 und 10 bewiesen sind.

Eliminieren wir nun aus den Gleichungen (4a, b) den Parameter λ, so ergibt sich die frühere Kegelschnittsgleichung $xy - s^2 = 0$ des Satzes 1 S. 165, d. h. die Schnittpunkte entsprechender Strahlen der beiden projektiven Strahlenbüschel (4a, b) liegen auf dem Kegelschnitt. Mit anderen Worten:

11. Die Punkte eines Kegelschnittes werden von je zweien unter ihnen (wie hier z. B. von den Punkten P, Q) durch projektive Strahlenbüschel projiziert. (Es sei noch erwähnt, daß für $\lambda = -1$ sich der Punkt $F = (1, 1, -1)$ des Kegelschnittes ergibt; vgl. die Fig. 119 S. 168.)

Es gilt nun aber auch der umgekehrte Satz:

12. Der geometrische Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier (nicht perspektiver) projektiver Strahlenbüschel mit den Trägern P, Q ist ein Kegelschnitt, der auch durch die Punkte P, Q hindurchgeht.

Die Projektivität der beiden Strahlenbüschel (P), (Q) sei durch die Strahlen PR, PQ und PE des Strahlenbüschels (P) und die ihnen entsprechenden Strahlen QP, QR und QE des Strahlenbüschels (Q) festgelegt, gemäß dem Satze 2 S. 166 (Fig. 119). Wir wählen dann PQR als Fundamentaldreieck mit dem Anfangspunkt R und E als dem Einheitspunkte eines (x, y, s)-Koordinatensystems. Dann wird die Projektivität der beiden Strahlenbüschel wieder durch die Gleichungen (4a, b) gegeben. Der geometrische Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen der beiden Strahlenbüschel ist dann aber wieder der Kegelschnitt, den die sich durch Elimination von λ ergebende Gleichung $xy - s^2 = 0$ darstellt, und dieser Kegelschnitt geht durch die Punkte P, Q, E hindurch und hat die Strahlen PR und QR als Tangenten der Punkte P, Q.

Den Sätzen 11 und 12 gemäß sprechen wir hier kurz von der *projektiven Erzeugung der Kegelschnitte als „Punktreihen zweiter Ordnung“ durch projektive Strahlenbüschel.*

Um nun auch die duale Betrachtung durchzuführen, können wir sogleich den Sätzen 11 und 12 analog die folgenden beiden Sätze zur Seite stellen:

13. Die Tangenten eines Kegelschnittes werden von je zweien unter ihnen in projektiven Punktreihen geschnitten, und umgekehrt:

14. Der geometrische Ort der Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier (nicht perspektiver) projektiver Punktreihen mit den Trägern p, q ist ein Kegelschnitt, der auch die Geraden p, q berührt (d. h. also: Die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte sind Tangenten an den Kegelschnitt, oder der Kegelschnitt ist die Enveloppe, die eingehüllte Kurve, aller Verbindungslinien).

Wir brauchen zum Beweise des Satzes 13 nur entsprechend den Gleichungen (4a, b) von den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} t + 2\lambda v &= 0, \\ 2u + \lambda t &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{a, b})$$

mit dem reellen Parameter λ auszugehen, aus denen durch Elimination von λ die Gleichung (3) S. 165 folgt. Für einen *bestimmten* Wert λ stellt die Gleichung (5a) einen Punkt der y-Achse dar, dessen Koordinaten nach dem Satze 3b S. 112 durch $x:y:s = 0:2\lambda:1$ gegeben sind, und die Gleichung (5b) einen Punkt der x-Achse mit den Koordinaten $x:y:s = 2:0:\lambda$. Beide Gleichungen zusammen aber stellen die Verbindungslinie dieser beiden Punkte dar mit den Linienkoordinaten $u:v:t = \lambda^2:1:(-2\lambda)$. Für $\lambda = \infty, 0, 1$ ergeben sich hiernach die Linienkoordinaten $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(1, 1, -2)$ der Tangenten QR, PR und GH der Fig. 120, überhaupt für einen beliebigen Wert λ die Linienkoordinaten (u, v, t) einer allgemeinen Geraden, die eine Tangente des Kegelschnittes der Gleichung (3) S. 165 ist. Nach dem Satze 2 S. 111 sind die unhomogenen Abszissen der Schnittpunkte mit der x-Achse von 4 für λ_i sich ergebenden Strahlen nach der Gleichung (5b) bestimmt durch

Fig. 120.

$$x_i = -\frac{t_i}{u_i} = \frac{2}{\lambda_i}$$

und die unhomogenen Ordinaten der Schnittpunkte mit der y-Achse nach der Gleichung (5a) durch

$$y_i = -\frac{t_i}{v_i} = 2\lambda_i.$$

Ersichtlich ist dann aber

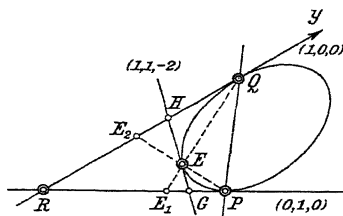
$$(x_1 x_2 x_3 x_4) = \left(\frac{2}{\lambda_1}\,\frac{2}{\lambda_2}\,\frac{2}{\lambda_3}\,\frac{2}{\lambda_4}\right) = (2\lambda_1\, 2\lambda_2\, 2\lambda_3\, 2\lambda_4) = (y_1 y_2 y_3 y_4).$$

Die (x, y)-Achsen können wir aber als zwei *beliebige* Tangenten des Kegelschnittes ansehen. Hiermit ist der Satz 13 bewiesen. Die Punktetripel P, R, G und R, Q, H geben hierbei entsprechende Punkte der Projektivität auf den beiden Tangenten PR und QR.

Auf den Beweis der Umkehrung, des Satzes 14, einzugehen, können wir uns wohl ersparen.

Den Sätzen 13 und 14 gemäß sprechen wir analog von der *projektiven Erzeugung der Kegelschnitte als „Strahlenbüschel zweiter Ordnung" durch projektive Punktreihen.*

Der Satz 12 S. 170 gestattet nun auch, *einfache projektive Konstruktionen der Kegelschnitte* anzugeben.

Es seien z. B. von dem Kegelschnitt drei Punkte P, Q, E und die Tangenten

in zweien derselben, die Tangenten in P, Q, gegeben (Fig. 121; in ihr sind die gegebenen Stücke zweckmäßig gewählt). Dann sind ja damit auch die projektiven Strahlenbüschel (P) und (Q) durch die entsprechenden Strahlentripel PR, PQ, PE und QP, QR, QE oder a, b, c und $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ festgelegt. Wir können nun, wie folgt, einen neuen Kegelschnittspunkt J konstruieren: Wir legen durch den Tangentenschnittpunkt R eine beliebige Gerade, welche die Geraden PE und QE in den Punkten M, N schneide. Wir behaupten: *Der Schnittpunkt J von PN und QM ist dann ein neuer Kegelschnittspunkt.* Wir erkennen nämlich folgendes: Das Strahlentripel a, b, c schneidet die Gerade QE in den Punkten K, Q, E und das Strahlentripel $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ die Gerade PE in den Punkten P, L, E. Es ist daher auch auf den Geraden QE und PE eine projektive Verwandtschaft durch das Entsprechen der Punktetripel K, Q, E und P, L, E festgelegt, und da der Schnittpunkt E sich selbst entspricht, so ist diese Projektivität eine „Perspektivität", d. h. die Verbindungslinien entsprechender Punkte müssen durch den Schnittpunkt R von KP und QL gehen. (Hierdurch ist also erreicht, daß die beiden gegebenen projektiven Strahlenbüschel (P), (Q) zu demselben dritten Strahlenbüschel (R) perspektiv sind. Hierbei sind dann RK, RQ und RE die zu den Strahlen a, b, c und $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ zugeordneten Strahlen). Ist daher durch R der beliebige Strahl MN gelegt, so sind auch PN und QM entsprechende Strahlen der projektiven Strahlenbüschel (P) und (Q) und ihr Schnittpunkt J also ein Kegelschnittspunkt. (Wir sehen auch leicht unmittelbar, daß nach dem Satze des Pappus, dem Satze 12 S. 127, $(KQEN) = (PLEM)$ ist und damit auch diese Punktquadrupel von P bzw. Q durch Strahlen mit demselben Doppelverhältnis projiziert werden.)

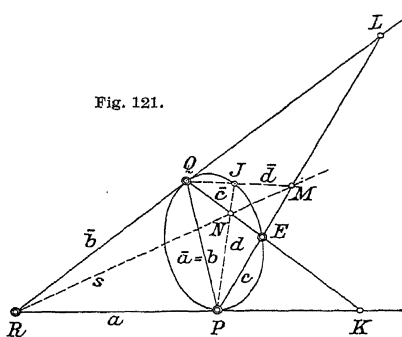



Fig. 121.

Es seien nun aber von dem Kegelschnitt fünf Punkte P, Q, E, J, J_1 gegeben (Fig. 122). Wir wählen dann zwei, etwa P, Q, als Träger der projektiven Strahlenbüschel, für die dann PE, PJ, PJ_1 und QE, QJ, QJ_1 entsprechende Strahlentripel sind. (Wir könnten also überhaupt auch annehmen, daß wir von diesen beiden Strahlentripeln, welche die projektive Beziehung der beiden Strahlenbüschel (P) und (Q) festlegen, ausgegangen sind.) Es sind dann auch auf den Geraden PE und QE die Punkte M, M_1 und N, N_1 als Schnittpunkte mit den Geraden QJ, QJ_1 bzw. PJ, PJ_1 bestimmt. Ist dann R der Schnittpunkt von MN und M_1N_1, so sind ersichtlich RP und RQ die Tangenten von P, Q, und damit ist die weitere Konstruktion neuer Punkte des Kegelschnittes auf die

vorige Aufgabe zurückgeführt. Wir nennen diese Konstruktion der Kegelschnittspunkte kurz den „*Punkterzeugungsmechanismus*".[1])

Analog verläuft die Konstruktion neuer Punkte des Kegelschnittes, wenn vier Punkte P, Q, E, J und die Tangente von P gegeben sind.

Es gelten überhaupt hiernach die Sätze:

15. Ein Kegelschnitt ist eindeutig bestimmt durch fünf Punkte oder durch vier Punkte und die Tangente in einem derselben oder durch drei Punkte und die Tangenten in zweien derselben (vgl. den Satz 4 S. 160).

Die *dualen* Konstruktionen, auf die wir nicht näher eingehen wollen, würden lauten:

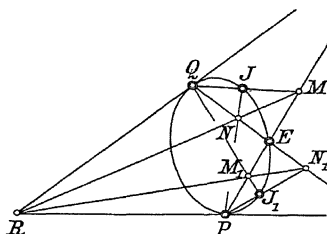
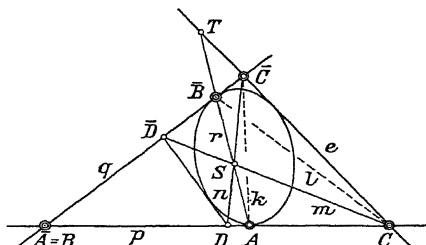



Fig. 122. Fig. 123.

Einen Kegelschnitt aus drei Tangenten und zweien ihrer Berührungspunkte oder aus vier Tangenten und einem ihrer Berührungspunkte oder aus fünf Tangenten zu konstruieren (Tangentenerzeugungsmechanismus).

Hierzu gehört noch der Satz:

16. Ein Kegelschnitt ist auch eindeutig bestimmt durch fünf Tangenten oder durch vier Tangenten und einen Berührungspunkt oder durch drei Tangenten und zwei Berührungspunkte.

In der Fig. 123 seien z. B. die Tangenten p, q mit den Berührungspunkten $A, \bar{B}$ und die Tangente e gegeben. Auf den Tangenten p, q ist somit durch die einander entsprechenden Punktetripel A, B, C und $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ eine Projektivität festgelegt. Die Verbindungslinien eines beliebigen Punktes S auf der Geraden $A\bar{B} = r$ mit C und $\bar{C}$ ergeben die Schnittpunkte $D, \bar{D}$ auf p, q. Dann ist die Gerade $D\bar{D} = i$ eine neue Tangente des Kegelschnittes. Es ist ja

$$(ABCD) = (kqen) = (A\bar{B}TS)$$
$$= (plem) = (\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}).$$

1) Ein bewegliches Modell dieses Erzeugungsmechanismus habe ich im Jahre 1909 im Verlage der Firma Martin Schilling, Leipzig (Modell der Serie XXVI, Nr. 18) herausgegeben.

Die Bezeichnungen der Punkte und Geraden der Fig. 123 sind ganz entsprechend den dualen Bezeichnungen der Geraden und Punkte der Fig. 121 gewählt.

§ 26. Die Festlegung der Punkte eines einteiligen Kegelschnittes durch Koten λ. Lineare Transformation der Punkte des Kegelschnittes.

Wir knüpfen nun weiterhin wieder an die Gleichungen (1a, b) S. 169 an:

$$\left.\begin{aligned} s - \lambda y &= 0, \\ x - \lambda s &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1\,\text{a, b})$$

Diese durch denselben Wert des Parameters λ gegebenen Geradenpaare haben ja als Schnittpunkt einen Punkt des Kegelschnittes mit der Gleichung (1) S. 165. Durch Elimination von s ergibt sich

$$x - \lambda^2 y = 0. \qquad (1\,\text{c})$$

Aus den Gleichungen (1a, b, c) folgt dann

$$x : y : s = \lambda^2 : 1 : \lambda \qquad (2)$$

oder

$$\begin{aligned} \varrho \cdot x &= \lambda^2, \\ \varrho \cdot y &= 1, \\ \varrho \cdot s &= \lambda. \end{aligned} \qquad (3\,\text{a, b, c})$$

1. Die homogenen Koordinaten der Kegelschnittspunkte sind also durch die Formeln (3a, b, c) *als spezielle ganze rationale Funktionen des Parameters λ dargestellt.*

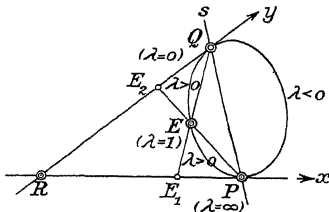



Fig. 124.

Wir erinnern noch einmal daran, daß für $\lambda = \infty, 0, 1$ sich ja die Punkte P, Q, E ergeben (Fig. 124). Haben wir nun jedem Punkte des Kegelschnittes als „*Kote*“ den zugehörigen Parameter λ zugeordnet, so sind die Koten

$$-\infty < \lambda \leqq +\infty$$

über den ganzen Kegelschnitt verteilt:

2. Jeder Zahl λ entspricht ein Kegelschnittspunkt und umgekehrt.

Deuten wir λ auch als Abszisse auf einer beliebigen Geraden g, so gilt also auch:

3. Die Punkte des Kegelschnittes sind eineindeutig auf die Punkte der Geraden g abgebildet.

Als eine solche Gerade g können wir z. B. die x-Achse der Fig. 124 wählen. Die Punkte des Kegelschnittes mit der Kote λ werden dann von Q aus auf die x-Achse in die Punkte mit der Abszisse $x = \lambda$ projiziert, d. h.

3a. Die Punkte des Kegelschnittes sind eineindeutig auf die Punkte der x-Achse abgebildet.

Führen wir statt λ homogene Größen λ, λ' ein, ersetzen wir also λ durch $\frac{\lambda}{\lambda'}$ und nehmen in den Gleichungen (3a, b, c) in ϱ den Faktor λ'^2 auf, so lauten die Gleichungen jetzt

$$\left.\begin{aligned} \varrho \cdot x &= \lambda^2, \\ \varrho \cdot y &= \lambda'^2, \\ \varrho \cdot s &= \lambda \cdot \lambda'. \end{aligned}\right\} \qquad (3'\text{a, b, c})$$

Im Hinblick auf die Sätze 11 und 12 S. 170 der projektiven Erzeugung des Kegelschnittes können wir jetzt die *Definition* aufstellen:

4. Wir nennen vier Punkte eines Kegelschnittes ***harmonisch****, wenn sie von einem beliebigen Punkte des Kegelschnittes durch vier harmonische Strahlen projiziert werden.*

Es folgt sogleich auf Grund des Satzes 3a der Satz:

5. Das Doppelverhältnis der vier Koten λ_i für vier harmonische Punkte des Kegelschnittes ist gleich -1.

Analog können wir noch die weitere *Definition* anschließen:

6. Unter dem Doppelverhältnis von vier Kegelschnittspunkten verstehen wir das Doppelverhältnis der vier Strahlen, welche die vier Punkte von irgendeinem Kegelschnittspunkt projizieren.

Nun wollen wir die interessante Frage aufwerfen:

Was bedeutet eine lineare Transformation

$$\left.\begin{aligned} \sigma \cdot \bar{\lambda} &= a\lambda + b\lambda', \\ \sigma \cdot \bar{\lambda}' &= c\lambda + d\lambda' \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{a, b})$$

mit $\Delta_\lambda = ad - bc \neq 0$ *für den Kegelschnitt?*

Für die Gerade g mit dem (λ, λ')-Abszissensystem bedeutet eine solche Transformation ja eine projektive Verwandtschaft bei festgehaltenem Koordinatensystem (vgl. § 19). Für den Kegelschnitt ergibt sich analog folgendes: Diese Transformation führt drei beliebige Punkte A, B, C des Kegelschnittes in die drei Punkte $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ des Kegelschnittes über. (Insbesondere können die Punkte $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ die Koten $\bar{\lambda}_i : \bar{\lambda}_i' = \bar{0}, \bar{1}, \bar{\infty}$ besitzen.) Dann entsprechen sich ja auch die vierten harmonischen Punkte, die sich bzw. zu den beiden Tripeln konstruieren lassen, überhaupt entsprechen stets vier harmonischen Punkten wieder vier harmonische Punkte (wie bei der Transformation auf der Geraden g). Umgekehrt gilt auch:

7. Soll jedem Punkte des Kegelschnittes $xy - s^2 = 0$ mit der Kote $\lambda : \lambda'$ ein anderer Punkt mit der Kote $\bar{\lambda} : \bar{\lambda}'$ zugeordnet sein und umgekehrt und sollen stets

hierbei vier harmonischen Punkten wieder vier harmonische Punkte entsprechen, so wird diese Verwandtschaft der Kegelschnittspunkte stets durch die Gleichungen (4a, b) *gegeben.*

8. Diese Verwandtschaft ist bereits eindeutig bestimmt, wenn drei beliebigen Punkten A, B, C des Kegelschnittes die drei neuen Punkte $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ des Kegelschnittes zugeordnet werden.

§ 27. Die linearen Transformationen der Ebene bei festem einteiligen Kegelschnitt.

Man kann ferner nun leicht den Satz nachweisen:

1. Zu jeder linearen Transformation (4a, b) *S. 175 der Kegelschnittspunkte gehört notwendig eine bestimmte projektive Verwandtschaft der Ebene, also eine lineare Transformation aller Punkte der Ebene* (bei unverändertem Koordinatensystem).

Denn es gilt ja für den Kegelschnitt $xy - s^2 = 0$ die durch die Gleichungen (3'a, b, c) S. 175 vermittelte Beziehung zwischen den Koordinaten x, y, s des einzelnen Kegelschnittspunktes und seiner Kote $\frac{\lambda}{\lambda'}$. Ebenso können wir setzen

$$\left.\begin{aligned} \varrho \cdot \bar{x} &= \bar{\lambda}^2, \\ \varrho \cdot \bar{y} &= \bar{\lambda}'^2, \\ \bar{\varrho} \cdot \bar{s} &= \bar{\lambda} \cdot \bar{\lambda}'. \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{a, b, c})$$

Dann wird eben durch die Transformation (4a, b) nun auch eine Transformation der Koordinaten (x, y, s) in die Koordinaten $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$ vermittelt. Es ist nämlich nach den Gleichungen (4a, b) S. 175 für die Kegelschnittspunkte

$$\begin{aligned} \bar{\varrho} \cdot \sigma^2 \cdot \bar{x} = \sigma^2 \cdot \bar{\lambda}^2 &= (a\lambda + b\lambda')^2 = a^2\lambda^2 + b^2\lambda'^2 + 2ab\lambda\lambda' \\ &= \varrho \cdot [a^2 x + b^2 y + 2abs]. \end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned} \bar{\varrho} \cdot \sigma^2 \cdot \bar{y} = \sigma^2 \cdot \bar{\lambda}'^2 &= (c\lambda + d\lambda')^2 = c^2\lambda^2 + d^2\lambda'^2 + 2cd\lambda\lambda' \\ &= \varrho \cdot [c^2 x + d^2 y + 2cds], \\ \bar{\varrho} \cdot \sigma^2 \cdot \bar{s} = \sigma^2 \bar{\lambda} \cdot \bar{\lambda}' &= (a\lambda + b\lambda') \cdot (c\lambda + d\lambda') \\ &= ac\lambda^2 + bd\lambda'^2 + (ad + bc)\lambda\lambda' \\ &= \varrho \cdot [acx + bdy + (ad + bc)s] \end{aligned}$$

oder für $\frac{\bar{\varrho} \cdot \sigma^2}{\varrho} = \varrho'$:

$$\left.\begin{aligned} \varrho' \cdot \bar{x} &= a^2 x + b^2 y + 2abs, \\ \varrho' \cdot \bar{y} &= c^2 x + d^2 y + 2cds, \\ \varrho' \cdot \bar{s} &= acx + bdy + (ad + bc)s. \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{a, b, c})$$

Diese nun für *alle* Punkte der projektiven Ebene gedeuteten Gleichungen stellen die zugeordnete projektive Verwandtschaft der Ebene dar und es ist ihre Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & 2ab \\ c^2 & d^2 & 2cd \\ ac & bd & ad+bc \end{vmatrix} = (ad-bc)^3 = \Delta_\lambda^3 \neq 0. \tag{3}$$

Es gilt auch umgekehrt:

2. Jede solche Transformation (2a, b, c) *für gegebene Werte a, b, c, d mit $\Delta \neq 0$ stellt eine solche projektive Verwandtschaft der Ebene dar, bei der der Kegelschnitt $xy - s^2 = 0$ als Ganzes in sich übergeht, seine Punkte aber die Transformation* (4a, b) *S. 175 erleiden.*

Es ergibt übrigens auch die direkte Rechnung

$$\varrho'^2(\bar{x}\bar{y} - \bar{s}^2) = (a^2x + b^2y + 2abs) \cdot (c^2x + d^2y + 2cds) - [acx + bdy + (ad + bc)s]^2$$
$$= (ad - bc)^2 \cdot (xy - s^2),$$

woraus folgt, daß die Gleichung $xy - s^2 = 0$ eine *Invariante* der Transformationen (2a, b, c) ist. Die Transformationen (2a, b, c) enthalten die vier Koeffizienten a, b, c, d, deren Verhältnis nur wesentlich ist; sie umfassen daher ∞^3 *verschiedene Transformationen.*

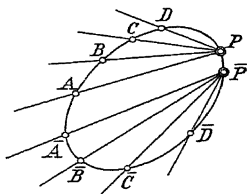
Wir erkennen auch sofort noch weiter:

3. Es kann außer den Transformationen (2a, b, c) *keine weitere projektive Verwandtschaft geben, die den Kegelschnitt $xy - s^2 = 0$ in sich überführt.*

Denn eine jede solche projektive Verwandtschaft ist ja durch zwei entsprechende Quadrupel A, B, C, D und $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ von Kegelschnittspunkten bereits *eindeutig* festgelegt, wobei natürlich die Doppelverhältnisse der beiden Punktquadrupel einander gleich sein müssen (vgl. die Fig. 125, in der auch $P, \bar{P}$ irgend zwei entsprechende Kegelschnittspunkte sein mögen). Also ist die einzelne projektive Transformation bereits durch die zwei Tripel A, B, C und $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ *eindeutig* bestimmt. Zu dieser Zuordnung der Punktetripel gehört dann auch notwendig *eindeutig* eine lineare Transformation der Koten $\lambda : \lambda'$, wobei wir das Koordinatensystem natürlich so gewählt voraussetzen, daß der Kegelschnitt die Gleichung $xy - s^2 = 0$ besitzt.

Fig. 125.

Hieraus folgt:

4. Die Gesamtheit a l l e r *projektiven Verwandtschaften (oder Kollineationen) der Ebene, welche einen gegebenen (einteiligen) Kegelschnitt $xy - s^2 = 0$ in sich*

überführen, wird durch die Formeln (2a, b, c) *gegeben und bildet eine Gruppe von ∞^3 Verwandtschaften, also eine Untergruppe der achtgliedrigen Gruppe aller projektiven Verwandtschaften* (vgl. den Satz 13 S. 135).

Eine solche Untergruppe wird für unsere spätere nichteuklidische Betrachtung von größter Wichtigkeit werden.[1]) Wir haben ja schon vorahnend (Satz 10 S. 17) bemerkt, daß der Ort der unendlich fernen Punkte in der hyperbolischen Geometrie ein reeller Kegelschnitt sein wird.

§ 28. Die Polarenverwandtschaft bei einem einteiligen Kegelschnitt.

Wir wollen nun noch kurz auf die *Polarentheorie* der Kegelschnitte eingehen. Der einteilige Kegelschnitt sei gemäß § 22 durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 - s^2 = 0 \tag{1}$$

gegeben. Die Gleichung der Tangente im Kegelschnittspunkt (x_0, y_0, s_0) lautet

$$x x_0 + y y_0 - s s_0 = 0.$$

Wir werfen nun die Frage auf: Was bedeutet diese letzte Gleichung, wenn der Punkt (x_0, y_0, s_0) *nicht* ein Punkt des Kegelschnittes ist?

Diese Frage führt uns zu der *Definition:*

1. Die Polare eines beliebigen Punktes (x_0, y_0, s_0) bezüglich eines Kegelschnittes, den wir durch die Gleichung (1) *gegeben denken können, ist die Gerade mit der Gleichung der Polargleichung,*

$$x x_0 + y y_0 - s s_0 = 0. \tag{2}$$

Der Punkt (x_0, y_0, s_0) selbst heißt der Pol dieser Geraden und die Beziehung zwischen dem Pol und seiner Polaren nennt man kurz die Polarenverwandtschaft in der Ebene bezüglich des gegebenen Kegelschnittes.

Jetzt können wir auch die besondere Beziehung des der Gleichung (1) zugrunde liegenden Fundamentaldreiecks (vgl. § 22) zum Kegelschnitt durch den Satz charakterisieren:

2. Das Fundamentaldreieck der Fig. 110a S. 158 ist ein sogenanntes Polardreieck des Kegelschnittes, d. h. jede Seite ist die Polare der Gegenecke.

In der Tat hat der Punkt $R = (0, 0, 1)$ nach der Gleichung (2) die Polare $s = 0$, der Punkt $P = (1, 0, 0)$ die Polare $x = 0$ und der Punkt $Q = (0, 1, 0)$ die Polare $y = 0$.

1) Vgl. insbesondere: Franz Meyer, Tabellen von unendlichen kontinuierlichen Transformationsgruppen, Chicago, Congress Papers 1896, S. 187; F. Klein, Einleitung in die höhere Geometrie, II, autographierte Vorlesung des Sommersemesters 1893, ausgearbeitet von Fr. Schilling, Göttingen 1893, S. 150—152, insbesondere Nr. 17, S. 152; sowie wegen weiterer Literatur: G. Fano, Kontinuierliche geometrische Gruppen, Enzyklopädie der Math. Wiss. Bd. III, 1, erste Hälfte, S. 302.

Wir können mit den sogleich folgenden Sätzen auch leicht beweisen:

2a. Von einem beliebigen Polardreieck eines Kegelschnittes liegt stets eine und nur eine Ecke im Innern des Kegelschnittes und stets eine und nur eine Seite schneidet den Kegelschnitt nicht.

Ferner folgt aus der Definition 1 sogleich:

3. Jeder Kegelschnittspunkt selbst hat als Polare seine Tangente.

Von diesem speziellen Fall sei im folgenden abgesehen, da für ihn die folgenden Sätze trivial sind.

Wir behaupten dann weiter:

4. Legt man durch den Pol $L = (x_0, y_0, s_0)$ eine beliebige Sekante durch den Kegelschnitt, so liegt der vierte harmonische Punkt zu den beiden Kegelschnittspunkten und dem Pol auf der Polaren l.

Mit anderen Worten:

4a. Die Polare l ist der geometrische Ort der Punkte aller Sekanten durch L, welche die zugehörigen Kegelschnittssehnen zusammen mit dem Pol L harmonisch teilen.

Fig. 126.

Es seien für den Beweis bei einer beliebigen Sekante durch den Pol $L = (x_0, y_0, s_0)$ die Koordinaten des vierten harmonischen Punktes M mit x', y', s' bezeichnet (Fig. 126). Die Koordinaten der Kegelschnittspunkte T_1, T_2 lassen sich dann ausdrücken durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda \cdot x', \\ y &= y_0 + \lambda \cdot y', \\ s &= s_0 + \lambda \cdot s' \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{a, b, c})$$

für $\lambda = \lambda_1$ und λ_2.

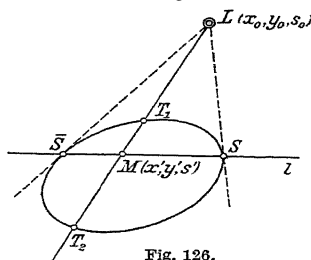
Da die vier Punkte L, M, T_1, T_2 auf der Sekante harmonisch sind, so muß $\lambda_2 = -\lambda_1$ sein. Die Koordinaten (x, y, s) der Punkte T_1, T_2 genügen nun der Kegelschnittsgleichung, d. h. es gilt

$$(x_0 + \lambda x')^2 + (y_0 + \lambda y')^2 - (s_0 + \lambda s')^2 = 0$$

oder $\quad (x_0{}^2 + y_0{}^2 - s_0{}^2) + \lambda^2(x'^2 + y'^2 - s'^2) + 2\lambda(x_0 x' + y_0 y' - s_0 s') = 0. \quad (4)$

Da die Wurzeln λ_1, λ_2 dieser Gleichung entgegengesetzt gleich sein sollen, so muß diese Gleichung rein quadratisch sein. Es muß also

$$x_0 x' + y_0 y' - s_0 s' = 0$$

sein, d. h. die Koordinaten (x', y', s') des vierten harmonischen Punktes M genügen in der Tat der Gleichung (2) der Polaren.

Durch den Satz 4 ist nun zugleich gezeigt:

5. *Die Beziehung zwischen dem Pol und seiner Polaren ist eine rein geometrische, d. h. sie ist von der Wahl des Koordinatensystems ganz unabhängig.*

Bei Zugrundelegung der allgemeinen Gleichung (1) S. 154 des Kegelschnittes wird die Polarenverwandtschaft durch die Polargleichung

$$A x x_0 + B y y_0 + C(x y_0 + y x_0) + D(x + x_0) + E(y + y_0) + F = 0 \qquad (5)$$

gegeben.

Ferner gilt der Satz:

6. *Für einen außerhalb des Kegelschnittes gelegenen Punkt L ist die Polare die Verbindungslinie der Berührungspunkte S, $\bar{S}$ der beiden von L an den Kegelschnitt gehenden reellen Tangenten* (Fig. 126).

Diesen Satz können wir als Folgerung des Satzes 4 ansehen; es folgt übrigens aus der Gleichung (4) für $x_0 x' + y_0 y' - s_0 s' = 0$ und $x'^2 + y'^2 - s'^2 = 0$, daß $\lambda_1 = \lambda_2 = \infty$ (oder $\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_2} = 0$) ist, d. h. daß dann die Punkte T_1, T_2 und M zusammenfallen. (Besser würden wir dann ja die homogenen Gleichungen

$$\begin{aligned} \sigma \cdot x &= \lambda' x_0 + \lambda x', \\ \sigma \cdot y &= \lambda' y_0 + \lambda y', \\ \sigma \cdot s &= \lambda' s_0 + \lambda s' \end{aligned}$$

benutzen, wo dann $\lambda_1' = \lambda_2' = 0$ sich ergeben würde.)

Die Linienkoordinaten der Polaren (2) sind ja gegeben durch die folgenden Gleichungen mit dem Proportionalitätsfaktor ϱ, indem wir noch x_0, y_0, s_0 durch x, y, s ersetzen:

$$\left.\begin{aligned} \varrho \cdot u &= x, \\ \varrho \cdot v &= y, \\ \varrho \cdot t &= -s. \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{a, b, c})$$

Diese Gleichungen sind aber ein spezieller Fall der folgenden:

$$\left.\begin{aligned} \varrho \cdot u &= \alpha x + \beta y + \gamma s, \\ \varrho \cdot v &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' s, \\ \varrho \cdot t &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' s, \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{a, b, c})$$

wobei wieder

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} \neq 0$$

sei. Diese Gleichungen ordnen jedem Punkte (x, y, s) der Ebene eine bestimmte Gerade (u, v, t) zu. Wir wollen im einzelnen diese Zuordnung nicht untersuchen, die zu folgender *Definition* führt:

7. Die durch solche Gleichungen (7a, b, c) *bestimmte Zuordnung der Punkte und Geraden in der Ebene nennt man eine korrelative Verwandtschaft (Korrelation oder auch Reziprozität).*

Wir können jedenfalls sagen:

8. Die Polarenverwandtschaft bezüglich eines gegebenen Kegelschnittes ist eine spezielle Korrelation.

Sonderlich Geheimnisvolles stellen die Korrelationen nun nicht vor. Denn es gilt auch der Satz:

9. Jede gegebene Korrelation läßt sich auch als die Aufeinanderfolge einer Polarenverwandtschaft an einem gegebenen Kegelschnitt und einer Projektivität oder Kollineation darstellen (vgl. den § 16).[1])

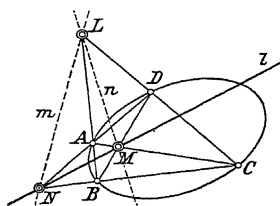
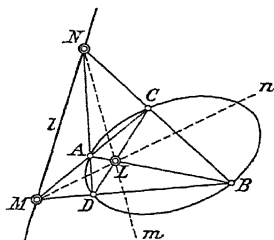



Fig. 127a.

Fig. 127b.

Wir wollen noch die folgende *Konstruktion der Polaren l eines beliebigen Pols L* angeben. Diese Konstruktion gilt sowohl für einen äußerlich wie innerlich gelegenen Pol L (Fig. 127a, b). Durch den Pol L seien zwei beliebige Sekanten des Kegelschnittes mit den Schnittpunkten A, B und C, D gelegt. Die Diagonale MN des einbeschriebenen vollständigen Vierecks $ABCD$ ist dann die Polare l des Punktes L. Überhaupt ist das Diagonaldreieck LMN stets ein Polardreieck des Kegelschnittes. Alles dies folgt aus den harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks (vgl. § 6, S. 51 ff.).

§ 29. Punktreihen konjugierter Pole und Strahlenbüschel konjugierter Polaren.

Die Polarenverwandtschaft wollen wir aber noch näher betrachten, indem wir wieder an die Gleichung (2) S. 178 der Polaren anknüpfen. Ist jetzt $M = (x', y', s')$ ein Punkt der Polaren, so lautet dessen Polare

$$x x' + y y' - s s' = 0. \tag{1}$$

Da aber diese Gleichung nun auch für die Koordinaten x_0, y_0, s_0 erfüllt ist,

1) Vgl. betreffs der allgemeinen Korrelation des Näheren z. B. A. Schoenflies, Einführung in die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, Berlin 1925, S. 173; sowie Heffter-Koehler, Lehrbuch der analytischen Geometrie I, 1927, S. 171 ff. und von älterer Literatur z. B.: G. v. Escherich, Einleitung in die analytische Geometrie des Raumes, Leipzig 1881, Kap. 11.

ebenso wie die Gleichung (2) S. 178 für die Koordinaten x', y', s', so gilt der Satz:

1. Geht die Polare eines Punktes L durch den Punkt M, so geht auch die Polare von M durch L (Fig. 128).

Demgemäß stellen wir die *Definition* auf:

2. Wir nennen bei einem Kegelschnitt zwei Punkte L, M ***konjugiert*** *oder* ***konjugierte Pole****, wenn die Polare des einen durch den anderen geht.*

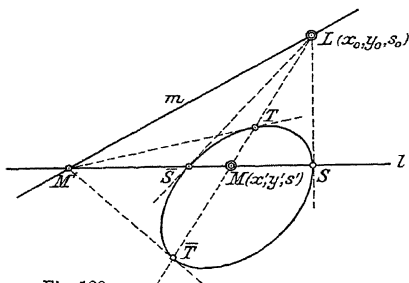
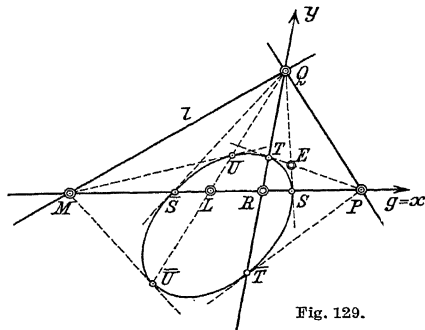



Fig. 128. Fig. 129.

Ferner gilt dann:

*3. Die konjugierten Pole auf einer beliebigen Geraden g (bei gegebenem Kegelschnitt) bilden bzw. eine hyperbolische, elliptische oder parabolische Involution, je nachdem die Gerade g den Kegelschnitt (reell) schneidet, nicht schneidet oder berührt. (****Punktreihe konjugierter Pole****.)*

Zum Beweise betrachten wir die drei unterschiedenen Fälle nacheinander:

Fall 1: *Die Gerade g schneide den Kegelschnitt in zwei reellen Punkten* $S, \bar{S}$ (Fig. 129).

Wir denken ein solches Polardreieck (vgl. Satz 2 S. 178) als Fundamentaldreieck PQR mit dem Einheitspunkt E, analog wie im § 22 (vgl. die Fig. 110a S. 158) für das Koordinatensystem zugrunde gelegt, daß die Gerade g die Seite $y = 0$ des Fundamentaldreiecks ist. Ist dann $(x_0, 0, s_0)$ ein Punkt L der Geraden g, so lautet seine Polare gemäß der Gleichung (2) S. 178

$$x x_0 - s s_0 = 0. \tag{2}$$

Diese Polare schneidet also die Gerade g in dem konjugierten Pole $M = (x, 0, s)$, dessen Abszisse $x : s$ eben durch die Gleichung (2) festgelegt ist. Die durch die Gleichung (2) vermittelte Zuordnung der Punkte $\frac{x_0}{s_0}$ und $\frac{x}{s}$ der x-Achse ist also wirklich eine *hyperbolische Involution* (vgl. die Sätze 3 und 3a S. 147). Ihre

Doppelpunkte sind durch die Abszissen $\frac{x}{s} = \pm 1$ gegeben, sind also die Kegelschnittspunkte auf der x-Achse.

Fall 2: *Die Gerade g schneide den Kegelschnitt nicht* (Fig. 130).

Dann soll g die den Kegelschnitt nicht schneidende Seite PQ oder $s = 0$ des durch ein Polardreieck gegebenen Fundamentaldreiecks PQR sein (vgl. wieder die Fig. 110a S. 158). Auf der Geraden g ist dann die Verwandtschaft der konjugierten Pole gemäß der Gleichung (2) S. 178 für $s_0 = s' = 0$ festgelegt durch die Gleichung

$$x x_0 + y y_0 = 0, \quad (s = 0), \tag{3}$$

Fig. 130.

wobei wir (x, y) und (x_0, y_0) als homogene Koordinaten der Punkte L, M auf g zu deuten haben. Diese Zuordnung ist dann also eine *elliptische Involution* mit den beiden konjugiert-imaginären Doppelpunkten

$$\frac{x}{y} = \pm i, \quad s = 0,$$

den Schnittpunkten der durch R gehenden Geraden $x = \pm i \cdot y$ mit der Geraden $s = 0$.

Im Hinblick auf den Satz 9 S. 149 können wir sogleich noch hinzufügen:

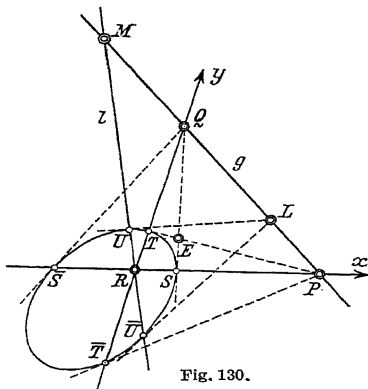
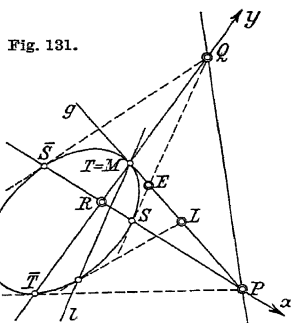
4. *Auf einer den Kegelschnitt nicht reell schneidenden Geraden g sind die konjugiert-imaginären Schnittpunkte* reell *durch zwei Paare konjugierter Pole auf g dargestellt.*

Fig. 131.

Fall 3: *Die Gerade g berühre den Kegelschnitt* (Fig. 131).

Dann soll das durch ein Polardreieck gegebene Fundamentaldreieck PQR so gewählt sein, daß die Gerade g die Tangente $y = s$ wird (vgl. wieder die Fig. 110a S. 158). Die Gleichung (2) S. 178 der Polarenverwandtschaft liefert dann für $y_0 = s_0$ und $y = s$ die Gleichung

$$x \cdot x_0 = 0, \quad (y = s), \tag{4}$$

welche die Verwandtschaft konjugierter Pole auf der Geraden g festlegt. Wenn wir wollen, können wir hierbei x, x_0 direkt als die auf die Gerade g übertragenen Abszissen deuten. Jedenfalls haben wir hier also eine *parabolische Involution* vor uns mit dem einen Doppelpunkt $x = 0$, dem Berührungspunkt der Tangente g. Hiermit ist dann unser Satz 3 vollständig bewiesen.

Wir können nun der Definition 2 weiter auch dual die folgende *Definition* anschließen:

5. *Wir nennen bei einem Kegelschnitt zwei Geraden l, m konjugiert oder konjugierte Polaren, wenn der Pol der einen auf der anderen liegt* (Fig. 132a, b).

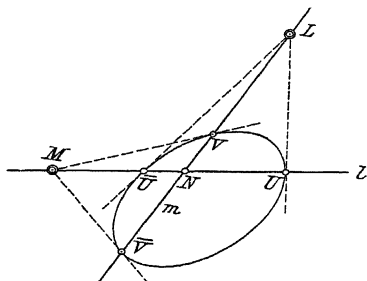



Fig. 132a.

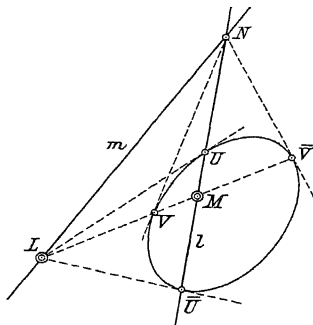



Fig. 132b.

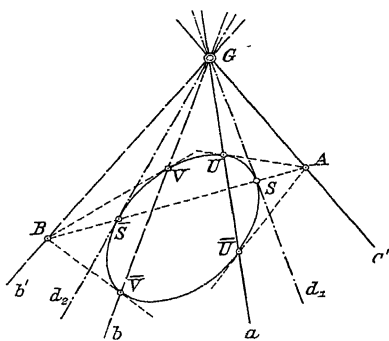



Fig. 133.

6. *Die konjugierten Polaren durch einen beliebigen Punkt G (bei gegebenem Kegelschnitt) bilden bzw. eine hyperbolische, elliptische oder parabolische Involution, je nachdem der Punkt G außerhalb, innerhalb oder auf dem Kegelschnitt liegt (Strahlenbüschel konjugierter Polaren; Fig. 133). Die Doppelstrahlen d_1, d_2 der Involution sind die vom Träger G an den Kegelschnitt gehenden Tangenten.*

Doch wollen wir im einzelnen hierauf nicht weiter eingehen.

§ 30. Die Polarenverwandtschaft bei einem nullteiligen Kegelschnitt.

Analog der reellen Deutung konjugiert-imaginärer Punkte auf einer Geraden durch eine elliptische Involution (vgl. den Satz 9 S. 149) gestattet uns nun die Polarentheorie, uns auch von dem nullteiligen Kegelschnitt

$$x^2 + y^2 + s^2 = 0 \tag{1}$$

eine *reelle Veranschaulichung* zu schaffen. Zu diesem Kegelschnitt gehört ja die Polarenverwandtschaft mit der Polargleichung

$$x x_0 + y y_0 + s s_0 = 0. \tag{2}$$

Durch diese Gleichung wird eben wieder dem Pol (x_0, y_0, s_0) die Polare zugeordnet. Wir erkennen leicht, daß auch hier beispielsweise das Fundamentaldreieck ein Polardreieck ist. Für diese Polarenverwandtschaft gelten sinngemäß die analogen Sätze, wie wir sie in den beiden vorigen Paragraphen für den einteiligen Kegelschnitt entwickelt haben. Beispielsweise seien zunächst die Sätze genannt:

1. Die Polare ist der geometrische Ort des vierten harmonischen Punktes auf jeder Sekante durch den Pol zu den beiden (konjugiert-imaginären) Kegelschnittspunkten und dem Pol selbst (vgl. den Satz 4 S. 179 und den Satz 10 S. 150).

2. Geht die Polare eines Punktes L durch den Punkt M, so geht die Polare von M durch L (vgl. den Satz 1 S. 182).

An diesen letzten Satz schließt sich dann wieder die Definition konjugierter Pole an. Vor allem können wir auch hier den dem Satze 3 S. 182 analogen Satz beweisen:

3. Die konjugierten Pole auf einer beliebigen Geraden g für den gegebenen Kegelschnitt $x^2 + y^2 + s^2 = 0$ bilden stets eine elliptische Involution, deren Doppelpunkte die konjugiert-imaginären Schnittpunkte der Geraden g mit dem Kegelschnitt sind. Beispielsweise hat die elliptische Involution $x x_0 + s s_0 = 0$ der x-Achse die Doppelpunkte $x = \pm is$.

Nun brauchen wir nur auf den Satz 9 S. 149 zurückzublicken. Dann können wir auch sagen:

4. Hiernach ist eben die Polarenverwandtschaft (2) *die reelle Darstellung des nullteiligen Kegelschnittes* (1).

Wie eben bei einer elliptischen Involution nicht die konjugiert-imaginären Doppelpunkte an sich, sondern die zu ihnen gehörende Zuordnung der Punkte uns interessieren, so interessieren uns besonders bei einem nullteiligen Kegelschnitt nicht die Punkte des Kegelschnittes selbst, sondern die zu dem Kegelschnitt gehörende Polarenverwandtschaft.

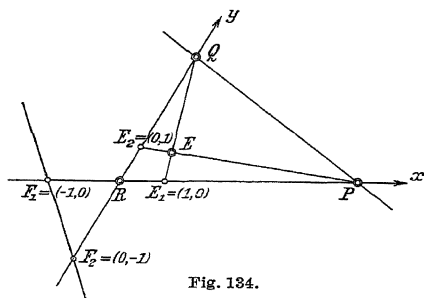
Wir wollen noch die Frage aufwerfen: *Wodurch ist diese Polarenverwandtschaft geometrisch gerade bestimmt?* Das der Gleichung (1) zugrunde liegende Fundamentaldreieck ist ja ein Polardreieck (vgl. die Fig. 112 S. 161). Die Polare des Einheitspunktes E ist hier die Gerade

$$x + y + s = 0,$$

d. h. die Gerade, welche die x, y-Achsen in den Punkten $x = -1$ bzw. $y = -1$ schneidet (Fig. 134). (Im Falle des einteiligen Kegelschnittes ist vergleichsweise die Polare des Einheitspunktes die Gerade $x + y - s = 0$, d. h. die Gerade, welche die x, y-Achsen in den Punkten $x = 1$ bzw. $y = 1$ schneidet, und die Punkte $x = \pm 1$ bzw. $y = \pm 1$ der x- bzw. y-Achse sind die

Fig. 134.

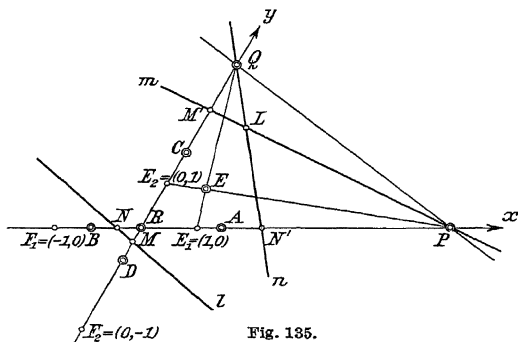
Doppelpunkte der hyperbolischen Involution konjugierter Pole auf diesen Achsen.) Die Punktepaare $0, \infty$ und ± 1 der x-Achse sind nun konjugierte Pole oder Paare entsprechender Punkte der durch die Gleichung

$$x x_0 + s s_0 = 0 \tag{3}$$

auf der x-Achse bestimmten elliptischen Involution. Und diese Punktepaare sind überdies auch miteinander harmonisch. Analoges gilt hinsichtlich der Punkte $0, \infty$ und ± 1 auf der y-Achse. Hieraus folgt zunächst leicht:

5. *Die Polarenverwandtschaft des nullteiligen Kegelschnittes (d. h. dieser Kegelschnitt selbst) ist eindeutig bestimmt durch ein Polardreieck PQR, so daß also P, R bzw. Q, R konjugierte Pole auf den Geraden PR und QR sind, und durch je ein zweites Paar A, B bzw. C, D konjugierter Pole auf der x- bzw. y-Achse* (Fig. 135).

Fig. 135.

Denn durch die Punktepaare P, R und A, B bzw. Q, R und C, D sind ja gerade die elliptischen Involutionen auf den x, y-Achsen bestimmt.

Und es gilt dann ferner: Eine beliebige Gerade m durch P mit dem Schnittpunkt M' auf QR hat notwendig den zum Punkte M' zugeordneten Punkt M als Pol. (Denn da die Gerade m durch P geht, muß ja ihr Pol M auf der Polaren QR von P liegen.) Und ein *beliebiger* Punkt L hat als Polare die Verbindungslinie der Pole M, N für die Geraden $PL = m$ und $QL = n$. Es ist also die Polarenverwandtschaft in der Tat vollständig durch die in dem Satze 5 angegebenen Punkte bestimmt.

Wir können nun noch diejenigen entsprechenden Punkte E_1, F_1 der elliptischen Involution auf der x-Achse bestimmen, die zu den Punkten P, R harmonisch liegen (vgl. den Satz 12 S. 150), und analog die Punkte E_2, F_2 auf der y-Achse. Wählen wir dann das Polardreieck PQR als Fundamentaldreieck und den Schnittpunkt E von PE_2 und QE_1 als Einheitspunkt eines projektiven Koordinatensystems, so ist wieder die Gleichung (2) die Gleichung

der Polarenverwandtschaft und die Gleichung (1) die Gleichung des zugehörigen nullteiligen Kegelschnittes.

6. Das Fundamentaldreieck PQR mit dem Einheitspunkt E ist somit auch die einfachste reelle Veranschaulichung des zugehörigen nullteiligen Kegelschnittes, d. h. seiner Polarenverwandtschaft. (Vgl. die analogen Verhältnisse bei den einteiligen Kegelschnitten.)

Es ist auch leicht, gemäß dem Satze 5 den Satz zu bestätigen:

7. Es gibt ∞^5 verschiedene nullteilige Kegelschnitte, wie es auch ∞^5 verschiedene einteilige Kegelschnitte gibt.

Im Hinblick auf die Fig. 134 können wir ja für eine beliebige Gerade g, welche als y-Achse gelten soll, auf ∞^2 verschiedene Weisen den Pol P wählen und auf g zum beliebigen Pol Q auf ∞^1 Weisen den konjugierten Pol R, wodurch dann das Polardreieck PQR festgelegt ist. Endlich kann man den Einheitspunkt E auf ∞^2 Weisen wählen, so daß insgesamt sich ∞^5 Möglichkeiten ergeben. Die analoge Abzählung können wir auch im Hinblick auf die Fig. 110a S. 158 für den *einteiligen* Kegelschnitt ausführen.

Im übrigen folgt natürlich der Satz 7 analytisch auch schon daraus, daß die allgemeine Kegelschnittsgleichung (1) S. 154 sechs Koeffizienten besitzt, auf deren Verhältnis es nur ankommt.

Wir haben nun alle für den Aufbau der nichteuklidischen Geometrie notwendigen Eigenschaften der Kegelschnitte entwickelt, so daß wir nicht weiter in dieses auch an sich wichtige und interessante Gebiet eindringen wollen. Klar hervorheben wollen wir jedoch ausdrücklich noch einmal hier:

Bei allen unseren Betrachtungen über die Theorie der Kegelschnitte brauchten wir aus dem gewählten begrenzten Gebiet, z. B. dem Gebiet einer Dreiecksfläche, nicht hinauszugehen.

Achter Abschnitt.

Die Abbildung der projektiven Ebene in einem begrenzten Gebiet des Raumes.

§ 31.[1]) Die Abbildung der projektiven Ebene auf das durch die Zuordnung der Randpunkte geschlossene Innere des Einheitskegelschnittes.

Es handelt sich hier und in den beiden folgenden Paragraphen um eine außerordentlich interessante Aufgabe, die aber auch an das geometrische Vorstellungsvermögen höhere Ansprüche stellt.[2])

1) Die §§ 31—34 können beim ersten Studium fortgelassen werden.

2) Die Betrachtungen dieses sowie des folgenden Paragraphen lehnen sich an meine Arbeit an „Über die Abbildung der projektiven Ebene auf eine geschlossene singularitätenfreie Fläche im erreichbaren Gebiet des Raumes", Math. Ann. 92, 1924, S. 69—79. In dieser Arbeit ist die euklidische Geometrie zur Vereinfachung der Betrachtungen benutzt worden.

Wir gehen aus von der folgenden Transformation der projektiven Ebene $\mathfrak{E}$ in homogenen Koordinaten:

$$\left.\begin{aligned} \varrho \cdot \bar{x} &= r \cdot x, \\ \varrho \cdot \bar{y} &= r \cdot y, \\ \varrho \cdot \bar{s} &= \sqrt{x^2 + y^2 + r^2 s^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{a, b, c})$$

wo zunächst der Wurzel beide Vorzeichen zukommen sollen, ϱ ein nicht verschwindender Proportionalitätsfaktor und r eine positive endliche und nicht verschwindende Zahl ist. Für die Koordinaten (x, y, s) und $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$ soll dasselbe projektive Koordinatensystem gelten. Wir erkennen sogleich: Wenn die Größen x, y, s nicht gleichzeitig verschwinden, so verschwinden auch die Größen $\bar{x}, \bar{y}, \bar{s}$ nicht gleichzeitig und umgekehrt. Es ist dann auch

$$\varrho^2 (r^2 \bar{s}^2 - \bar{x}^2 - \bar{y}^2) = r^4 \cdot s^2$$

oder

$$\frac{r^2}{\varrho} \cdot s = \sqrt{r^2 \bar{s}^2 - \bar{x}^2 - \bar{y}^2}$$

und

$$\frac{r^2}{\varrho} \cdot x = r \cdot \bar{x},$$

$$\frac{r^2}{\varrho} \cdot y = r \cdot \bar{y}.$$

Also lauten die Gleichungen der umgekehrten Transformation für $\frac{r^2}{\varrho} = \varrho'$

$$\left.\begin{aligned} \varrho' \cdot x &= r \cdot \bar{x}, \\ \varrho' \cdot y &= r \cdot \bar{y}, \\ \varrho' \cdot s &= \sqrt{r^2 \bar{s}^2 - \bar{x}^2 - \bar{y}^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{a, b, c})$$

Diese „quadratische“ Transformation wollen wir nun im einzelnen uns näher ansehen und dabei auch anschaulich erfassen: Jedem Punkte (x, y, s) entsprechen im allgemeinen, d. h. wenn $x^2 + y^2 + r^2 s^2 \neq 0$ oder wenn nicht $x = y = 0$ ist, *zwei* Punkte $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$. Diese beiden Punkte haben entgegengesetzte unhomogene Koordinaten $\bar{x}, \bar{y}$. Dem Punkte $x = 0$, $y = 0$ entspricht dagegen der *eine* Punkt $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$, und jedem Punkte des nullteiligen Kegelschnittes $x^2 + y^2 + r^2 s^2 = 0$ entspricht auch nur *ein* Punkt $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$, und zwar auf der Geraden $\bar{s} = 0$. Umgekehrt entsprechen jedem Punkte $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$ im allgemeinen, d. h. wenn $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - r^2 \bar{s}^2 \neq 0$ oder wenn nicht $\bar{x} = \bar{y} = 0$ ist, *zwei* Punkte (x, y, s). Dem Punkte $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$ entspricht wieder nur der *eine* Punkt $x = 0$, $y = 0$ und jedem Punkte des einteiligen Kegelschnittes $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - r^2 \bar{s}^2 = 0$ entspricht auch nur *ein* Punkt (x, y, s), und zwar auf der Geraden $s = 0$. Den *reellen* Punkten (x, y, s) (d. h. den Punkten mit reellen Koordinaten) entsprechen insbesondere diejenigen *reellen* Punkte $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$, die

innerhalb oder auf dem Kegelschnitt $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - r^2\bar{s}^2 = 0$ liegen; es ist ja dann nach den Gleichungen (1a, b, c) stets für $s \neq 0$ bei unhomogenen Koordinaten

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = r^2 \cdot \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + r^2} < r^2$$

und für $s = 0$

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = r^2. \tag{3}$$

Unbeschadet der Allgemeinheit unserer Betrachtung können wir fernerhin $r = 1$ setzen. Den Kegelschnitt $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 1$ wollen wir dann den *projektiven Einheitskegelschnitt* (Fig. 136) nennen (vgl. die Fig. 110a der S. 158 und den Satz 1 S. 160).

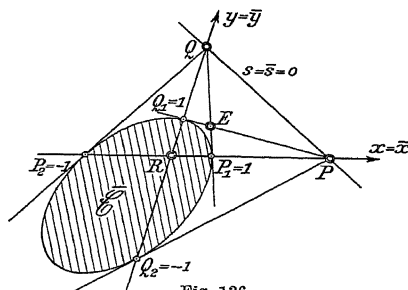
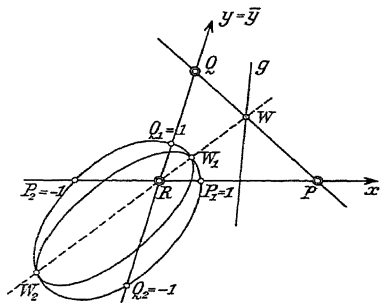



Fig. 136. Fig. 137.

Weiter ergeben sich folgende Eigenschaften:

1. Jeder reellen, nicht durch den Koordinatenanfangspunkt R gehenden Geraden g der Ebene $\mathfrak{E}$

$$a x + b y + c s = 0 \quad (c \neq 0) \tag{4}$$

entspricht ein einteiliger Kegelschnitt $\bar{g}$ *der Ebene* $\bar{\mathfrak{E}}$

$$(a^2 + c^2)\bar{x}^2 + (b^2 + c^2)\bar{y}^2 + 2ab\,\bar{x}\bar{y} - c^2\bar{s}^2 = 0. \tag{5}$$

Dieser Kegelschnitt berührt den Einheitskegelschnitt in zwei diametralen Punkten W_1, W_2, *nämlich in den Schnittpunkten des Einheitskegelschnittes mit der Geraden RW, wo W der Schnitt der Geraden g mit der Geraden* $s = 0$ *ist* (Fig. 137; in ihr entsprechen die beiden Hälften des Kegelschnittes dem doppelten Vorzeichen der Wurzel in den Gleichungen (1a, b, c)).

Der Punkt $(x, y, 0) = (a, b, 0)$ hat nämlich als Polare die Gerade *RW* mit der Gleichung $a x + b y = 0$ sowohl für den Einheitskegelschnitt wie für den Kegelschnitt mit der Gleichung (5).

2. Jeder reellen, durch R gehenden Geraden g der Ebene $\mathfrak{E}$ *dagegen entspricht diejenige doppelt zählende Strecke innerhalb des Einheitskegelschnittes der Ebene* $\bar{\mathfrak{E}}$, *die mit der Geraden g sich deckt.*

3. Jedem Geradenbüschel mit einem Träger W auf der Geraden $s = 0$ entspricht also das Büschel von Kegelschnitten, die den Einheitskegelschnitt in den zugehörigen Punkten W_1, W_2 berühren (Fig. 138).

4. Der einzelne Kegelschnitt $\bar{g}$ ist also vollständig bestimmt, wenn außer seinen diametralen Berührungspunkten W_1, W_2 noch ein weiterer Punkt A (im Innern des Einheitskegelschnittes) gegeben ist.

Für unseren augenblicklichen Zweck brauchen wir nur die Abbildung der *reellen* Punkte (x, y, s) durch die Formeln (1a, b, c) heranzuziehen, so daß also auch nur die reellen Punkte $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$ innerhalb oder auf dem Einheitskegelschnitt in Betracht kommen. (Wir können uns das Innere des Einheitskegelschnittes, den verschiedenen Wurzelvorzeichen in den Formeln (1a, b, c) entsprechend, auch *doppelt überdeckt* denken, wobei die beiden Blätter an dem Rande zusammenhängen. Jedem reellen Punkte (x, y, s) entspricht dann je *ein* Punkt $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$ in jedem der beiden Blätter.) Ferner wollen wir jetzt aber in den Formeln (1a, b, c) für $s \neq 0$ der Wurzel nur dasselbe Vorzeichen wie der Koordinate s geben, also nur das positive Vorzeichen, wenn wir s positiv wählen; dann entspricht jedem reellen Punkte $(x, y, s \neq 0)$ nur *ein* Punkt $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$, und es haben also die unhomogenen Koordinaten x, y stets dieselben Vorzeichen wie die unhomogenen Koordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$ des entsprechenden Punktes. Für $s = 0$ dagegen soll (entsprechend) das positive oder negative Wurzelvorzeichen gelten, je nachdem wir von positiven bzw. negativen Werten s aus uns dem Werte $s = 0$ annähern. Demgemäß haben wir nunmehr das Resultat zu beachten:

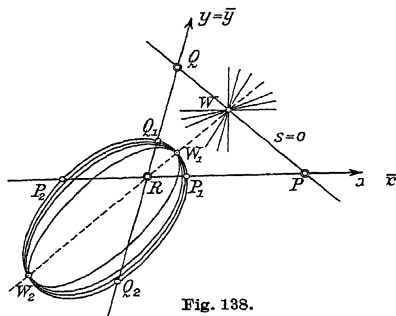



Fig. 138.

5. Jeder reelle Punkt (x, y, s), $s \neq 0$ der projektiven Ebene findet sein Abbild in einem bestimmten Punkte $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$ innerhalb des Einheitskegelschnittes $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - \bar{s}^2 = 0$; jeder reelle Punkt (x, y, s), $s = 0$ dagegen in zwei Punkten des Einheitskegelschnittes selbst, die in bezug auf den Koordinatenanfangspunkt R zueinander diametral liegen, und umgekehrt.

6. Jeder Geraden g mit der Gleichung (1) *entspricht demgemäß nur der eine Bogen $\widehat{W_1W_2}$ des zugehörigen Kegelschnittes mit der Gleichung* (2) *und jeder Geraden durch R nur die eine zugehörige Strecke $\overline{W_1W_2}$. Diesen Bogen $\widehat{W_1W_2}$ bzw. diese Strecke $\overline{W_1W_2}$ können wir dann auch als Pseudogerade bezeichnen. Die einzelne Pseudogerade ist durch zwei Punkte A, B eindeutig bestimmt.*

7. Hiermit haben wir, kurz gesagt, eine bestimmte stetige Abbildung der längs der Geraden $s = 0$ eingeschnittenen projektiven Ebene $\mathfrak{E}$ auf die Innenfläche des Einheitskegelschnittes, auf die Fläche $\overline{\mathfrak{E}}$, wie wir sie jetzt kurz nennen wollen, gewonnen.

Der Einschnitt der projektiven Ebene $\mathfrak{E}$ bei dieser Abbildung fällt aber fort, wenn wir die Punkte auf dem Rande der Fläche des Einheitskegelschnittes noch bezüglich des Punktes R diametral einander zuordnen (Fig. 139), d. h. also je zwei diametrale Punkte nur als *einen* Punkt ansehen. Hiermit ist die Fläche des Einheitskegelschnittes gleichsam zu einer geschlossenen Fläche geworden. Natürlich können wir nun diese Fläche auch in einem vor unseren Augen liegenden begrenzten Gebiet gelegen denken.

8. Es stellt also diese Fläche $\overline{\mathfrak{E}}$ des Einheitskegelschnittes mit der diametralen Zuordnung der Randpunkte gewiß das einfachste in einem begrenzten Gebiet gelegene, singularitätenfreie Abbild der ganzen projektiven Ebene $\mathfrak{E}$ dar. Dieses Abbild ist auch stets ebenso zu verwenden wie die im nächsten Paragraphen sogleich hieraus konstruierte in sich geschlossene Fläche $\mathfrak{F}$.[1])

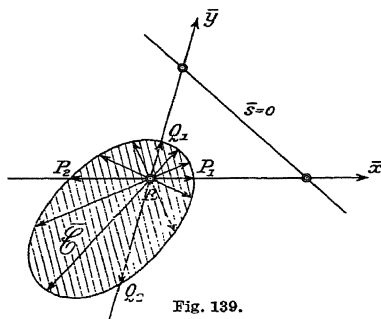



Fig. 139.

Statt der Formeln (1a, b, c) S. 188 können wir auch als Ausgang unserer Betrachtungen die Formeln

$$\begin{aligned} \varrho \cdot x^* &= r \cdot x, \\ \varrho \cdot y^* &= r \cdot y, \\ \varrho \cdot s^* &= r \cdot s + \sqrt{x^2 + y^2 + r^2 s^2} \end{aligned} \qquad (6\text{a, b, c})$$

wählen mit folgender Festsetzung für reelle Koordinaten (x, y, s): Für $s \neq 0$ soll die Wurzel dasselbe Vorzeichen wie die Koordinate s haben. Dann haben wieder die unhomogenen, reellen Koordinaten x, y stets dieselben Vorzeichen wie die unhomogenen reellen Koordinaten x^*, y^* des entsprechenden Punktes. Für $s = 0$ soll auch dieselbe Festsetzung wie vorhin gelten.

9. Der Gesamtheit aller reellen Punkte (x, y, s) der projektiven Ebene $\mathfrak{E}$ entspricht dann eineindeutig die durch das Innere des Kegelschnittes

$$x^{*2} + y^{*2} - r^2 s^{*2} = 0 \qquad (7)$$

1) Vgl. insbesondere die interessante Bemerkung auf S. 71 meiner genannten Arbeit, woselbst die analogen Verhältnisse für die Raumgeometrie besprochen werden.

gegebene F l ä c h e $\mathfrak{S}^*$ *mit der bezüglich des Koordinatenanfangspunktes R diametralen Zuordnung der Randpunkte.* Ist insbesondere $r = 1$ gewählt, wie dies in der Folge sein soll, so stellt ja der Kegelschnitt (5) wieder den *Einheitskegelschnitt* dar.

Für die Punkte (x^*, y^*, s^*) dieser Fläche gilt dann auch umgekehrt

$$\begin{aligned} \varrho' x &= x^*, \\ \varrho' y &= y^*, \\ \varrho' s &= \frac{s^{*2} - x^{*2} - y^{*2}}{2s^*} \quad (\text{für } s^* \neq 0), \end{aligned} \qquad (8\text{a, b, c})$$

wo $\varrho' = \frac{1}{\varrho}$ ist.

10. Jeder Geraden g oder

$$a x + b y + c s = 0 \quad (c \neq 0)$$

entspricht also der im Innern des Kegelschnittes (7) *verlaufende Bogen* $\bar{g}$ *des einteiligen Kegelschnittes*

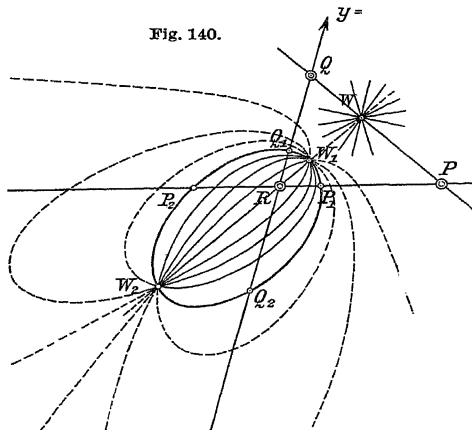
$$2 a x^* s^* + 2 b y^* s^* + c(s^{*2} - x^{*2} - y^{*2}) = 0. \qquad (9)$$

(Insbesondere ergibt sich für $a = b = 0$ natürlich der Kegelschnitt (7).) *Alle diese Kegelschnitte gehen durch die beiden Punkte* $(x^*, y^*, s^*) = (\pm i, 1, 0)$ *hindurch. Außerdem schneidet der einzelne Kegelschnitt den Kegelschnitt* (7) *in zwei diametralen Punkten* W_1, W_2, *den Abbildern des Schnittpunktes W der gegebenen Geraden g und der Geraden* $s = 0$.

Fig. 140.

11. Jeder Geraden g oder $a x + b y = 0$ *durch den Koordinatenanfangspunkt R entspricht aber die im Innern des Kegelschnittes* (7) *liegende Strecke derselben Geraden.*

12. Jedem Geradenbüschel mit einem Träger W auf der Geraden $s = 0$ *entspricht das Büschel der im Innern des Kegelschnittes* (7) *verlaufenden Bogens von denjenigen Kegelschnitten, die durch die entsprechenden Punkte* W_1, W_2 *des Randes und die Punkte* $(\pm i, 1, 0)$ *hindurchgehen* (Fig. 140).

13. Der einzelne Kegelschnittsbogen ist eindeutig bestimmt, wenn zwei Punkte A, B oder außer den diametralen Schnittpunkten W_1, W_2 *mit dem Einheitskegelschnitt noch ein Punkt A gegeben ist. Den Kegelschnittsbogen* $\widehat{W_1 W_2}$ *können wir wieder als* P s e u d o g e r a d e *bezeichnen.*

Dieses zweite Abbild der projektiven Ebene auf das Innere des Einheitskegelschnittes mit diametraler Zuordnung der Randpunkte, die Fläche $\mathfrak{E}^*$, ist dann in ganz analoger Weise zu benutzen, wie wir jetzt weiter das erste Abbild der projektiven Ebene, die Fläche $\overline{\mathfrak{E}}$, benutzen werden.

Durch diese Abbildung der ganzen projektiven Ebene sind wir im besonderen auch in der Lage, für jede beliebige Figur in der projektiven Ebene ein im begrenzten Gebiet liegendes Abbild uns zu denken.

§ 32. Die eineindeutige Abbildung der projektiven Ebene auf eine nicht singularitätenfreie Fläche in einem begrenzten Gebiet des Raumes.

Wir wollen nun dazu übergehen, die Fläche $\overline{\mathfrak{E}}$ des Satzes 7 S. 191 noch in eine in sich geschlossene Fläche überzuführen, indem wir den Rand entsprechend der diametralen Punktzuordnung mit sich selbst vereinigen. Wir wollen zunächst einmal folgendermaßen verfahren:

Wir wenden auf die Fläche $\overline{\mathfrak{E}}$ die Transformation an

$$\left.\begin{aligned} \varrho_1 x^* &= \bar{x}^2 - \bar{y}^2, \\ \varrho_1 y^* &= 2\,\bar{x}\,\bar{y}, \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{a, b, c})$$
$$\varrho_1 s^* =$$

oder umgekehrt für $\sqrt{\frac{2}{\varrho_1}} = \varrho_0$

$$\begin{aligned} \varrho_0 \cdot \bar{x} &= \sqrt{\sqrt{x^{*2} + y^{*2}} + x^*}, \\ \varrho_0 \cdot \bar{y} &= \sqrt{\sqrt{x^{*2} + y^{*2}} - x^*}, \\ \varrho_0 \cdot \bar{s} &= \sqrt{2 s^*}, \end{aligned} \qquad (2\text{a, b, c})$$

wo wieder die Koordinaten $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$ und (x^*, y^*, s^*) sich auf dasselbe Koordinatensystem beziehen sollen. Die Gleichungen (1a, b, c) ordnen eindeutig jedem Punkte $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$ einen Punkt (x^*, y^*, s^*) zu; doch entspricht den beiden Punkten $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$ und $(-\bar{x}, -\bar{y}, \bar{s})$ derselbe Punkt (x^*, y^*, s^*). Jedem Punkte $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$ des Einheitskegelschnittes $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - \bar{s}^2 = 0$ bzw. im Innern desselben entspricht stets wieder ein Punkt (x^*, y^*, s^*) des Einheitskegelschnittes $x^{*2} + y^{*2} - s^{*2} = 0$ bzw. in seinem Innern. In der Ebene $\mathfrak{E}^*$ werden wir die Fläche des Einheitskegelschnittes, *die neue Fläche* $\mathfrak{E}^*$, jetzt doppelt überdeckt denken. In der Fig. 141 ist diese neue Fläche $\mathfrak{E}^*$ ein wenig verzerrt dargestellt; sie hat im Punkte R einen Windungspunkt, und die beiden Blätter der Fläche sind längs des positiven Teiles der x^*-Achse kreuzweis ineinander übergehend angenommen. In den Gleichungen (2a, b, c) sind dementsprechend die Koordinatenzahl s^* sowie die Vorzeichen der Wurzeln $\sqrt{x^{*2} + y^{*2}}$ und $\sqrt{2 s^*}$ stets positiv und die Vorzeichen der Hauptwurzeln auf den rechten

Seiten der Gleichungen (2a, b) entweder beide positiv oder beide negativ zu wählen.

Wir bemerken weiter, daß die beiden Punkte (x^*, y^*, s^*), welche einem Punkte $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$ auf dem Rande von $\overline{\mathfrak{E}}$ und seinem diametralen Punkte entsprechen, in der Fig. 141 gerade übereinander liegen. Somit werden wir nunmehr, da wir ja die beiden diametralen Randpunkte von $\overline{\mathfrak{E}}$ nur als einen Punkt ansehen wollten, dementsprechend die übereinanderliegenden Randteile der Fläche $\mathfrak{E}^*$ miteinander vereinigen. Dann ist die Fläche $\mathfrak{E}^*$ in sich geschlossen.

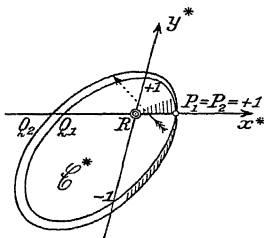



Fig. 141.

1. Die ganze projektive Ebene ist somit punktweise eineindeutig auf diese in sich geschlossene Fläche $\mathfrak{E}^*$ *abgebildet.*

Wir denken für einen Augenblick auch ein räumliches projektives (X, Y, Z, S)-Koordinatensystem eingeführt, wobei das ebene Koordinatensystem für $Z = 0$ mit dem (x, y, s)-Koordinatensystem identisch ist. (Diesem Koordinatensystem liegt ja ein *Fundamentaltetraeder mit zugehörigem Einheitspunkt* zugrunde.) Wir können dann die Fläche $\mathfrak{E}^*$ noch punktweise eineindeutig auf die folgende Fläche vierter Ordnung, die *Kummersche Fläche,* abbilden:

$$2Z^4 + Z^2 \cdot [2X^2 + 2XS + 3Y^2] + Y^2 \cdot [X^2 + Y^2 - S^2] = 0 \tag{3}$$

oder für $S = 1$, d. h. bei Benutzung unhomogener (X, Y, Z)-Koordinaten:

$$Z^4 + 2\alpha \cdot Z^2 + \beta = 0, \tag{3'}$$

wo $\alpha = \frac{1}{4}(2X^2 + 2X + 3Y^2), \quad \beta = \frac{1}{2}Y^2(X^2 + Y^2 - 1)$

ist, und zwar durch die Transformation

$$X = x^*,$$
$$Y = y^*,$$
$$Z = \pm\sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}},$$

wo $\alpha = \frac{1}{4}(2x^{*2} + 2x^* + 3y^{*2}), \quad \beta = \frac{1}{2}y^{*2} \cdot (x^{*2} + y^{*2} - 1) \leqq 0$

ist und für die Wurzel $\sqrt{\alpha^2 - \beta}$ bei den in Frage kommenden Punkten der Fläche stets das positive Vorzeichen zu wählen ist.

Die (unhomogene) Gleichung (3′) ist leicht in die folgende Form überzuführen:

$$((X + 1)^2 + Y^2 + Z^2) \cdot (Y^2 + 2Z^2) = 2(X + 1)(Y^2 + Z^2). \tag{3''}$$

Die hierdurch dargestellte Fläche ist im euklidischen Raum bekannt als der geometrische Ort der Krümmungskreise für die Normalschnitte eines nicht

singulären Flächenpunktes mit positiv gekrümmter Umgebung, wenn die Hauptkrümmungsradien gleich 1 und $\frac{1}{2}$ sind.[1])

Die Fläche der Gleichung (3′) hat ja als Schnitt mit der (X, Y)-Ebene, einer Symmetrieebene der Fläche, d. h. für $Z = 0$, außer der doppelt zählenden X-Achse den Einheitskegelschnitt k_1 mit der Gleichung

$$X^2 + Y^2 - 1 = 0.$$

Als Schnitt mit der (X, Z)-Ebene, der anderen Symmetrieebene der Fläche, d. h. für $Y = 0$, ergibt sich außer der doppelt zählenden X-Achse der Kegelschnitt k_2 mit der Gleichung

$$Z^2 + (X + \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4}.$$

Hiernach wird es nicht schwer sein, die Fläche selbst sich vorzustellen (vgl. die Abbildung des Flächenmodelles in der Fig. 142a und die zugehörige Zeichnung der Fig. 142b).

Die Abbildung der Fläche $\mathfrak{E}^*$ auf die Kummersche Fläche erfolgt dann anschaulich einfach so, daß je zwei übereinanderliegende Punkte der Fläche $\mathfrak{E}^*$ von dem der (X, Y)-Ebene gegenüberliegenden Eckpunkt des Fundamentaltetraeders aus auf die Kummersche Fläche projiziert werden. Wir können dementsprechend die Fläche $\mathfrak{E}^*$ gleichsam wie einen Gummiball aufgeblasen denken.

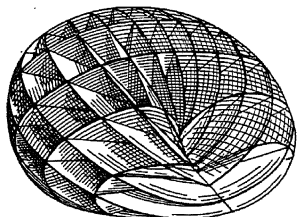
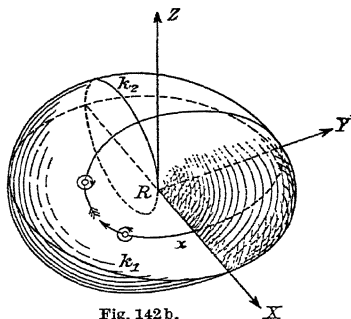



Fig. 142a.

Fig. 142b.

2. *Somit haben wir eine eineindeutige Abbildung der ursprünglichen projektiven Ebene $\mathfrak{E}$ über die Fläche $\mathfrak{E}^*$ auf die Kummersche Fläche gewonnen.*

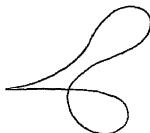
Aber nun müssen wir doch hervorheben, daß sowohl die Fläche $\mathfrak{E}^*$ des Satzes 1 S. 194 wie auch die Kummersche Fläche Singularitäten aufweist. Es ist gewiß wohl denkbar, daß ein zweidimensionales Wesen, das auf einer dieser

1) Vgl. wegen dieser Fläche z. B. G. Scheffers, Einführung in die Theorie der Flächen, Leipzig 1902, S. 147 und Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, Bd. II, 3. Aufl., Leipzig 1880, S. 443, sowie W. Dyck, Math. Ann. Bd. 32, 1888, S. 510 und W. Boy, Göttinger Nachrichten, 1901, S. 2. Modelle der Fläche sind bei der Firma M. Schilling in Leipzig als Serie IX Nr. 9 und XII Nr. 1 erschienen. Eine andere Fläche, die an Stelle der Fläche mit der Gleichung (3) treten kann, wird durch die noch einfachere Gleichung gegeben

$$2Z^4 + 2Z^2(X^2 + XS + Y^2) + Y^2(X^2 + Y^2 - S^2) = 0. \qquad (3^*)$$

Flächen lebt, von einer Singularität seiner Welt nichts merken wird (da es ja nur die Geometrie auf der Fläche kennt), ebensowenig vielleicht, wie analog

Fig. 143.

ein eindimensionales Wesen, das etwa an die Kurve der Fig. 143 gebunden ist, von der Singularität dieser Kurve. Wenn nur ein x-Koordinatensystem auf der Kurve gegeben ist, so können wir ja in ihm auch nicht angeben, daß die Kurve etwa eine Spitze besitzt. Doch wollen wir uns in diese Gedanken der zwei- oder eindimensionalen Psychologie nicht weiter hineinträumen.

§ 33. Die eineindeutige Abbildung der projektiven Ebene auf eine in sich geschlossene, singularitätenfreie Fläche $\mathfrak{F}$ in einem begrenzten Gebiet des Raumes.

In der Überschrift dieses Paragraphen werden ja *vier Eigenschaften* von der Abbildung der projektiven Ebene auf die Fläche $\mathfrak{F}$ gefordert: Die Abbildung soll eineindeutig und die Fläche $\mathfrak{F}$ soll in sich geschlossen, singularitätenfrei und in einem begrenzten Gebiet (etwa in einem Tetraeder) gelegen sein. Die Fläche $\mathfrak{E}^*$ wie die Kummersche Fläche sind, wie wir sahen, nicht singularitätenfrei (die Kummersche Fläche hat ja in den Punkten $(X, Y, Z) = (0, 0, 1)$ und $(1, 0, 0)$ sogenannte *uniplanare Knotenpunkte* als Singularitäten). Die Fläche $\overline{\mathfrak{E}}$ ist nicht in sich geschlossen, auch ist die Abbildung nicht eineindeutig. Die leicht vorstellbare Abbildung der projektiven Ebene $\mathfrak{E}$ auf eine gegebene ovale Fläche 2. Grades (Ellipsoid) von einem Punkte der Fläche aus oder von einem Punkte im Innern der Fläche aus ist nicht eineindeutig. Die Abbildung der projektiven Ebene $\mathfrak{E}$ auf eine andere Ebene von einem außerhalb beider liegenden Zentrum aus erfüllt nicht die Forderung, daß das Abbild in einem begrenzten Gebiet liegt. Es ist also leicht, sobald nur eine der vier Forderungen aufgegeben wird, die Abbildung auszuführen. *Jetzt aber gilt es, eine neue Fläche $\mathfrak{F}$ zu konstruieren, die alle vier Forderungen erfüllt.* Durch die Lösung dieser Aufgabe wird so recht die Tatsache ins helle Licht gerückt, *daß doch die projektive Ebene ein recht kompliziertes Gebilde ist.* Wir wollen also jetzt die Aufgabe in Angriff nehmen, die Fläche $\overline{\mathfrak{E}}$ des Satzes 7 S. 191 zu einer *singularitätenfreien,* in sich geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}$ in einem begrenzten Gebiete zusammenzubiegen, natürlich wieder durch Vereinigung der diametralen Randpunkte unter Verzerrung der Fläche $\overline{\mathfrak{E}}$.[1]) Es kommen hierbei die

1) Eine Konstruktion einer solchen Fläche $\mathfrak{F}$ ist auf Anregung von Herrn Hilbert zuerst von Herrn W. Boy in seiner Arbeit: Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen, Dissertation Göttingen 1901, abgedruckt Math. Ann. 57, S. 151ff., gegeben und durch zwei im Verlage von M. Schilling in Leipzig erschienene Modelle (Serie XXX Nr. 1, 2) veranschaulicht worden. Eine sehr viel einfachere Lösung dieser

Anschauungen des Zweiges der Geometrie zu ihrem Recht, den man als *Analysis situs* oder *Topologie* bezeichnet.

1. Die Analysis situs können wir mit F. Klein definieren als den Inbegriff aller der Eigenschaften geometrischer Gebilde, insbesondere von Flächen im Raum, die bei i r g e n d w e l c h e n eineindeutigen stetigen Transformationen der Fläche unverändert bleiben.

Denken wir z. B. einen Ringbereich aus Papier ausgeschnitten (Fig. 144) und knüllen wir dieses Papierstück beliebig zusammen, so bleibt jedenfalls folgende Eigenschaft bei diesen Transformationen erhalten: Es lassen sich stets auf der Fläche geschlossene, sich nicht schneidende oder berührende Kurven ziehen, die sich nicht auf einen Punkt zusammenziehen lassen, wie eine solche gestrichelt in der Figur angedeutet ist. Eine solche Eigenschaft bringt man, wie nur kurz bemerkt sei, dadurch zum Ausdruck, daß man dem Flächenstück die Zusammenhangszahl $p = 1$ beilegt im Gegensatz z. B. zu einer schlichten Kreisfläche mit der Zusammenhangszahl $p = 0$. Doch dies nur nebenbei.

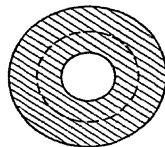
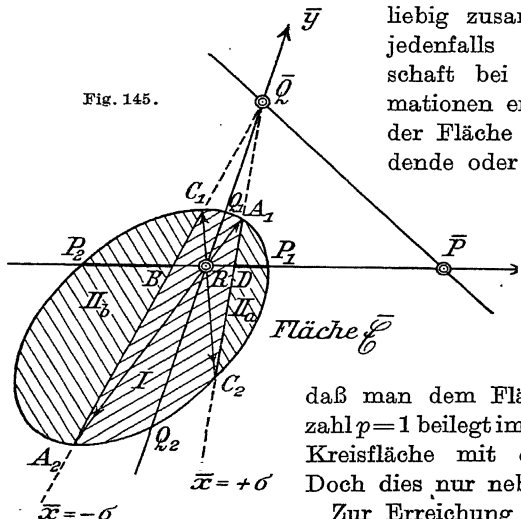



Fig. 144.

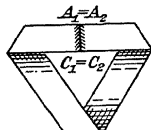
Fig. 145.

Zur Erreichung unseres Zieles zerlegen wir nunmehr zunächst die Fläche $\bar{\mathfrak{E}}$ der Fig. 139 durch die zwei Geraden $\bar{x} = \pm\,\sigma$ $(0 < \sigma < 1)$ in die drei Teile I, IIa, b (Fig. 145). Hierbei schneiden die beiden Geraden den Einheitskegelschnitt in den Punktepaaren A_1, C_2 und A_2, C_1 mit den Koordinaten $\bar{x}_1 = \sigma$, $\bar{y}_1 = +\sqrt{1-\sigma^2}$; $\bar{x}_1, -\bar{y}_1$ und $-\bar{x}_1, -\bar{y}_1$; $-\bar{x}_1, \bar{y}_1$; d. h. die Punkte A_1, A_2 und C_1, C_2 und somit auch die Bogen $\overset{\frown}{A_1 C_1}$ und $\overset{\frown}{A_2 C_2}$ des Einheitskegelschnittes sind einander diametral zugeordnet. Der mittlere Teil I der Figur läßt sich nun durch Vereinigung der Randstücke $\overset{\frown}{A_1 C_1}$ und $\overset{\frown}{A_2 C_2}$ in ein *Möbiussches Blatt* zusammenbiegen, und zwar von einer solchen Form,

Aufgabe ist dann von mir in meiner S. 187 zitierten Arbeit gegeben, wobei auch die punktweise eineindeutige Zuordnung der projektiven Ebene und der Fläche $\mathfrak{F}$ erfaßt wird. Die Darstellung in meiner Arbeit ist vielleicht etwas leichter als die des Textes zu überblicken, eben wegen der Annahme der euklidischen Geometrie, so daß sie eine gute Ergänzung unserer Ausführungen im Text gibt, die *rein projektiver* Natur sind.

wie es durch die sogleich noch näher erläuterte Fig. 146 dargestellt ist, in der der Bogen AC die vereinigten Ränder darstellt. Hierbei haben wir uns, den Anschauungen der Analysis situs gemäß, das Flächenstück I, wie später auch die anderen Flächenstücke, gleichsam aus einem zusammenziehbaren

Fig. 146.

und ausdehnbaren Gummihäutchen bestehend zu denken. Das Möbiussche Blatt können wir uns leicht durch einen Papierstreifen veranschaulichen, dessen schmale Ränder wir nach einer halben Umdrehung des einen Randes miteinander vereinigen, zusammenkleben oder mit einer Nadel zusammenstecken (Fig. 147a, b). Das Möbiussche Blatt stellt eine *einseitige* Fläche (und zwar mit nur einer Randkurve) dar, d. h. wir können nicht zwei Seiten der Fläche unterscheiden, derart, daß wir sie mit verschiedenen Farben anlegen, im Gegensatze etwa zu einem gewöhnlichen Ringflächenstück, wie es sich aus dem Papierstreifen ergibt, wenn wir die beiden schmalen Ränder ohne vorherige halbe Umdrehung des einen miteinander vereinigen (Fig. 147c). (Wir können auch das Möbiussche Blatt so

Fig. 147a. Fig. 147b. Fig. 147c. Fig. 147d.

zusammengeknickt denken, wie z. B. die Fig. 147d zeigt.)[1] Die bereits genannte Eigenschaft der einseitigen Fläche hängt mit der folgenden innig zusammen: Denken wir uns einen Punkt P mit einem bestimmten Umlaufungssinn von einer Anfangslage P_0 aus längs des ganzen Flächenbandes verschoben, bis er in seine ursprüngliche Lage zurückkommt, so ist der Umlaufungssinn dem ursprünglichen entgegengesetzt (vgl. die Punkte P_0 und P_1 in der Fig. 147b). Denken wir eine Person auf der Fläche spazieren gehen vom Punkte P_0 aus längs des ganzen Flächenbandes, so ist sie schließlich ihr Antipode zur Ausgangsstelle geworden; in der Fig. 147b ist diese Person durch die von P_0 und P_1 ausgehenden Strecken angedeutet. Alle diese Überlegungen gelten nun also auch unverändert für die projektive Ebene $\mathfrak{E}$. Es ist hiermit in einfachster Weise gezeigt:

2. *Die projektive Ebene stellt eine einseitige Fläche vor.*

---

1) Vgl. hinsichtlich der einseitigen Flächen: A. F. Möbius, Über die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders (1865), sowie aus dem Nachlaß: Einseitige Polyeder, Gesammelte Werke II, Leipzig 1886, S. 484 und 519, ferner auch Listing, Der Zensus der räumlichen Komplexe, Göttinger gelehrte Abh., 10. Bd., 1862, S. 97 und P. Staeckel, Die Entdeckung der einseitigen Flächen, Math. Ann. Bd. 52, 1899, S. 598.

Auch die Kummersche Fläche (Fig. 142a, b S. 195) ist eine *einseitige* Fläche; wir brauchen ja die Fläche nur einmal längs der eingezeichneten Kurve α zu durchlaufen. Hiernach ist es auch verständlich, wie z. B. bei einem im beschränkten Gebiet XYZ aus zwei Bogen bestehenden Kegelschnitt k derselbe Umlaufssinn sich auf den beiden Bogen darstellt (Fig. 148). Denken wir diesen Kegelschnitt k auf den Kegelschnitt k_1 oder k_2 zusammengezogen, so haben diese Kegelschnitte also im begrenzten Gebiet entgegengesetzte Umlaufssinne.

Fig. 148.

Wir kehren nun zur weiteren Verfolgung des Zusammenbiegens unserer Fläche $\overline{\mathfrak{E}}$ zurück. Die beiden Teile IIa und IIb der Fig. 145 S. 197 können wir durch Vereinigung ihrer beiden Ränder auf dem Einheitskegelschnitt zu *einer* ebenen Fläche, etwa zum Inneren eines neuen Kegelschnittes, aneinandergefügt denken. Wir bilden einfach die beiden Teile, in welche die ganze Fläche $\overline{\mathfrak{E}}$ der Fig. 145 durch die $\bar{y}$-Achse zerlegt wird, in der projektiven Ebene ab durch die Transformationsgleichungen

$$x' = \bar{y},\qquad y' = +\sqrt{1 + (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)} \quad \text{für den Teil mit \textit{positiver} Abszisse} \qquad (1\text{a, b})$$

und

$$\left.\begin{aligned} x' &= \bar{y},\\ y' &= -\sqrt{1 - (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)} \quad \text{für den Teil mit \textit{negativer} Abszisse}\end{aligned}\right\} \qquad (1'\text{a, b})$$

auf einen entsprechenden Bereich $\mathfrak{E}'$, wobei wieder das (x', y')-Koordinatensystem mit dem $(\bar{x}, \bar{y})$-System identisch sein möge.

Fig. 149.

Die Umkehrungen der Transformationsgleichungen (1a, b) und (1′a, b) lauten

$$\bar{x} = +\sqrt{1 - (x'^2 + y'^2)},\qquad \bar{y} = x'$$

bzw.

$$\bar{x} = -\sqrt{1 - (x'^2 + y'^2)},\qquad \bar{y} = -x'.$$

Die ganze Fläche $\overline{\mathfrak{E}}$ geht dann in das Innere des Einheitskegelschnittes des (x', y')-Systems über (Fig. 149; in allen einander zugeordneten Figuren sind entsprechende Punkte auch stets mit denselben Buchstaben bezeichnet). Dieser Einheitskegelschnitt mit diametraler Zuordnung seiner

Punkte entspricht der y-Achse der ursprünglichen projektiven (x, y)-Ebene. Die beiden Teile IIa, IIb der Fläche $\bar{\mathfrak{E}}$ (Fig. 145) sind ja bezüglich der unhomogenen Koordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$ ihrer Punkte durch die Ungleichungen bestimmt:

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 \leqq 1, \qquad \bar{x} \geqq \sigma \text{ bzw. } \bar{x} \leqq -\sigma, \quad (0 < \sigma < 1), \tag{2a, b, c}$$

woraus noch $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 \geqq \sigma, \quad \sigma \leqq |\bar{x}| \leqq 1, \quad 0 \leqq |\bar{y}| \leqq +\sqrt{1-\sigma^2}$

folgt. Die Begrenzungen der Teile IIa, IIb auf dem Einheitskegelschnitt der Fig. 145 gehen dann beide in dieselbe Strecke vom Punkte $-\sigma$ bis zum Punkte σ der x'-Achse über, wobei auch stets zwei diametrale Punkte demselben Punkte der x'-Achse entsprechen. Die Punkte der Begrenzung $\bar{x} = \sigma$ des Teiles IIa der Fig. 145 gehen in den Bogen des Kegelschnittes $x'^2 + y'^2 = 1 - \sigma^2$ mit nicht negativer Ordinate und die Punkte der Begrenzung $\bar{x} = -\sigma$ des Teiles IIb der Fig. 145 in den Bogen desselben Kegelschnittes mit nicht positiver Ordinate über. Die den Teilen IIa und IIb der Fig. 145 angehörenden Strecken der $\bar{x}$-Achse endlich gehen in die Strecken der y'-Achse vom Punkte 0 bis zu den Punkten $\pm\sqrt{1-\sigma^2}$ über. Durch die Transformationen (1a, b) und (1'a, b) wird also in der Tat das

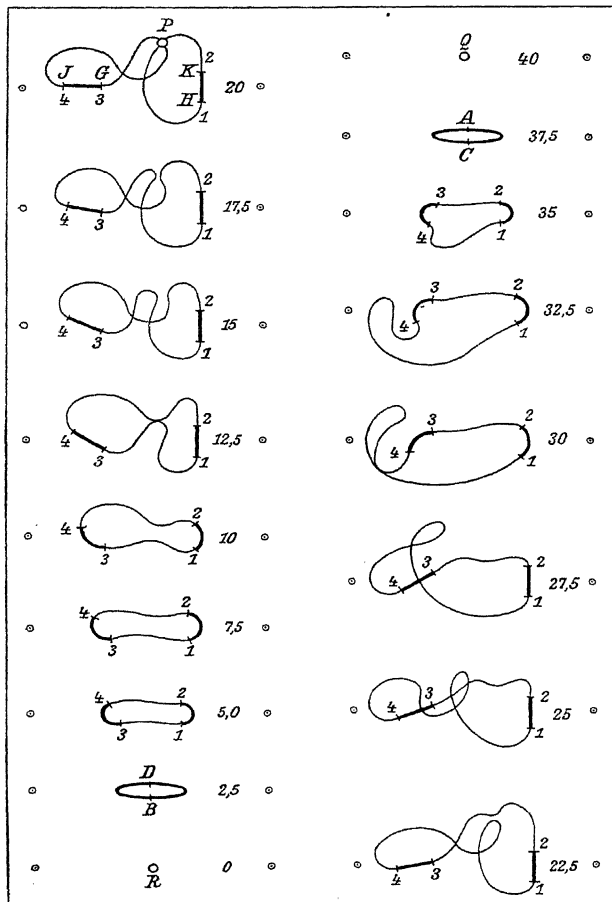



Fig. 150.

gewünschte Zusammenfügen der Teile IIa, IIb der Fig. 145 in das Innere des Kegelschnittes $x'^2 + y'^2 = 1 - \sigma^2$ der Fig. 149, das wir als *Fläche* $\mathfrak{E}'$ bezeichnen wollen, erreicht.

Unser weiteres Bestreben muß es nun sein, diese Fläche $\mathfrak{E}'$ und das Möbiussche Blatt mit entsprechenden Randstücken aneinanderzuheften, um die in sich geschlossene *Fläche* $\mathfrak{F}$ zu gewinnen. Um die Verhältnisse bei der immerhin komplizierten Fläche $\mathfrak{F}$ uns leicht vorstellen zu können, wollen wir uns sogleich erst einmal von der Fläche $\mathfrak{F}$ eine Anschauung schaffen. Wir bemerken demgemäß vorweg folgendes: Wir wollen jetzt die Fläche $\mathfrak{F}$ durch ein Ebenenbüschel, dessen Träger, die Gerade l, weit ab von der Fläche liegt, geschnitten denken. Wir betrachten eine Reihe solcher aufeinanderfolgender Schnitte, denen wir die „Koten" $\varkappa = 0$; 2,5; 5; 7,5 ... 37,5; 40 zuordnen wollen; diese Schnitte wollen wir demgemäß als *„kotierte Kurven"* bezeichnen. Die Ebenen für die Koten 0 und 40 mögen die Fläche $\mathfrak{F}$ in je einem Punkte R bzw. Q berühren. Diese 17 Schnitte sind nun in der Fig. 150 übereinanderliegend gezeichnet; die Koten $\varkappa$ selbst sind rechts neben jeder Kurve hinzugefügt. Die einzelnen Schnitte sind dann im Raum so übereinanderliegend zu denken, daß die auf den linken bzw. rechten Seiten hinzugefügten Nullenkreise je in derselben Geraden liegen. Die Raumfigur sei durch die Fig. 151 veranschaulicht, die die Abbildung eines demgemäß konstruierten Modelles darstellt. Viel Einzelnes haben wir nun noch zur Konstruktion dieser eigenartigen kotierten Kurven auszuführen: Wir wollen zunächst allein auf die stark ausgezogenen Teile der Kurven in der Fig. 150 achten. Diese stellen die Schnitte des Möbiusschen Blattes dar, die auch in der Fig. 146 eingezeichnet sind. (Insbesondere sei noch darauf hingewiesen, daß das Möbiussche Blatt in der Umgebung der Punkte R und Q etwa wie eine ovale Fläche 2. Grades ausgestaltet ist.)

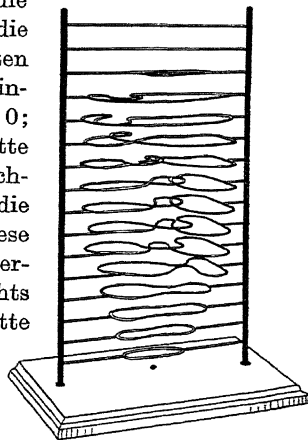



Fig. 151.

Wir betrachten nun weiter in der $(\bar{x}, \bar{y})$-Ebene die Kegelschnittschar, welche durch die Gleichungen

$$\bar{x}^2 + 2\bar{y}^2 = 1 + c \tag{3}$$

mit dem Parameter c gegeben wird, und zwar, soweit diese Kurven innerhalb der Fläche $\overline{\mathfrak{E}}$ verlaufen. In der Fig. 152, die also eine Vervollständigung der Fig. 145 darstellt, sind für 17 verschiedene Werte c diese Kegelschnittsbogen eingezeichnet. Für $c = 0$ erhalten wir den Kegelschnitt $\bar{x}^2 + 2\bar{y}^2 = 1$, welcher

in den Schnittpunkten P_1, P_2 der $\bar{x}$-Achse mit dem Einheitskegelschnitt letzteren berührt; er möge die Geraden $\bar{x} = \pm\,\sigma$ in den Punkten J, K und G, H schneiden. Für $c = -1$ ergibt sich der Koordinatenanfangspunkt R, und für $c = +1$ ergeben sich die Schnittpunkte Q_1, Q_2 der $\bar{y}$-Achse mit dem Einheitskegelschnitt als der der Fläche $\overline{\mathfrak{E}}$ angehörende Teil des Kegelschnittes $\bar{x}^2 + 2\bar{y}^2 = 2$. Außer diesen drei Werten -1, 0, $+1$ des Parameters c wollen wir letzterem noch die 14 weiteren Werte $\pm\frac{1}{8}$, $\pm\frac{2}{8}$, $\pm\frac{3}{8} \cdots \pm\frac{7}{8}$ erteilen (Fig. 152).

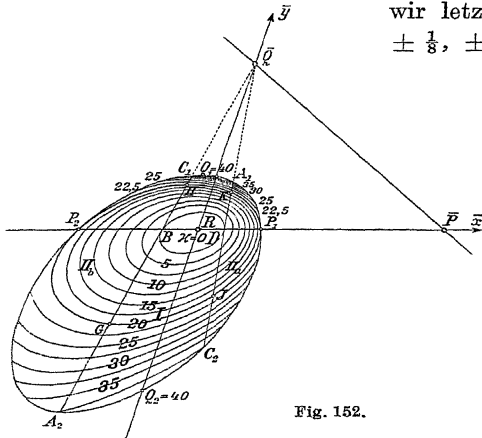



Fig. 152.

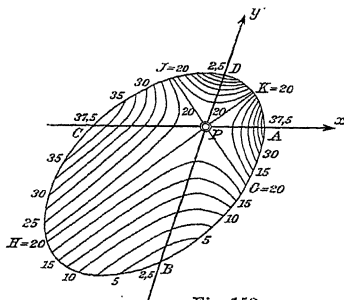



Fig. 153.

Wir wollen gleich bemerken, daß die ausgewählten Werte des Parameters c und der Kote $\varkappa$ durch die Formel

$$c = \frac{\varkappa}{20} - 1 \text{ oder } \varkappa = 20\,(c + 1) \tag{4}$$

zugeordnet sein sollen. Damit nun für $c = -\frac{7}{8}$ (oder $\varkappa = 2{,}5$) der Kegelschnitt (3) die Geraden $x = \pm\,\sigma$ in ihren Schnittpunkten B, D mit der $\bar{x}$-Achse berührt, wie es die Fig. 152 zeigt, soll noch nachträglich

$$\sigma = \frac{}{2\sqrt{2}}$$

gewählt sein. In der Fig. 152 sind dementsprechend den einzelnen Kurvenbogen sogleich die entsprechenden Koten $\varkappa$ beigefügt. Soweit diese 17 Kegelschnitte dem Teil I der Fläche $\overline{\mathfrak{E}}$ in der Fig. 152 angehören, sollen sie den Kurven entsprechen, die wir auch in der Fig. 146 auf dem Möbiusschen Blatt eingezeichnet haben, wobei ja diese Kurven den stark ausgezogenen Teilen der kotierten Kurven in der Fig. 150 entsprechen. Soweit aber diese Kegelschnittsbogen nun den Teilen IIa, IIb der Fig. 152 angehören, entsprechen ihnen in

der Fig. 149 der Fläche $\mathfrak{S}'$ gemäß den Transformationen (1a, b) und (1'a, b) S. 199 die Kegelschnittsbogen

$$y'^2 - x'^2 = c.$$

In der Fig. 153 als Ergänzung der Fig. 149 sind diese Kurvenbogen zugleich unter Beifügung der entsprechenden Koten $\varkappa$ eingezeichnet. Für $c = 0$ ($\varkappa = 20$) insbesondere ergeben sich die durch den Anfangspunkt P gehenden Strecken GJ und HK. Nach diesen Vorbereitungen ist es nun nicht mehr schwierig, zur Gewinnung der Fläche $\mathfrak{F}$ die Fläche $\mathfrak{S}'$ der Fig. 153 an das Möbiussche Blatt anzuheften, wobei wir uns die Fläche $\mathfrak{S}'$ natürlich wieder als ein zusammen- und ausziehbares Gummihäutchen zu denken haben. Am anschaulichsten werden wir die Verhältnisse überblicken, wenn wir die vier Gebiete, in welche die Fläche $\mathfrak{S}'$ durch die Geraden GJ und HK zerfällt, nacheinander anheften. Das Gebiet GPH bzw. JPK der Fig. 153 entspricht den von den Kurvenbogen 1–3 bzw. 2–4 der Kurven mit den Koten 2,5; 5,0 . . . 20 gebildeten beiden Teilen der Fläche $\mathfrak{F}$, das Gebiet GPK und HPJ dagegen den von den Kurvenbogen 2–3 bzw. 1–4 der Kurven mit den Koten 20 bis 37,5 gebildeten beiden Teilen der Fläche $\mathfrak{F}$ (Fig. 150). Besondere Beachtung verdient der Doppelpunkt P der Kurve mit $\varkappa = 20$ in der Fig. 150. Er entspricht dem Punkt P der Fig. 153, in dem die vier soeben betrachteten Gebiete zusammenstoßen. Dieser Punkt P ist vorher und nachher, d. h. für die Schnitte der Koten 17,5 und 22,5, in verschiedener Weise aufgelöst. Die geometrischen Verhältnisse der Fläche $\mathfrak{F}$ in der Umgebung des Punktes P sind ganz analog, wie bei dem Scheitelpunkte P eines hyperbolischen Paraboloids in der euklidischen Geometrie, wo die Schnitte je einer Parallelebene vor und nach der Tangentialebene des Punktes P, die ja zwei Erzeugende enthält, Hyperbeln ergeben, die auf die Tangentialebene projiziert in dem einen oder anderen Paar Scheitelwinkelräumen der beiden Erzeugenden verlaufen (Fig. 154a, b). Die übrigen in den einzelnen Schnitten der Fläche $\mathfrak{F}$ vorkommenden Doppelpunkte sind einfach die Schnitte mit Doppelkurven, Selbstdurchdringungskurven, der Fläche $\mathfrak{F}$. So sind z. B. beim Übergang vom Schnitt $\varkappa = 12{,}5$ zum Schnitt $\varkappa = 15$ zwei Doppelkurven entstanden, die ja aber keine Singularität bedingen. Analoges gilt beim Übergang vom Schnitt $\varkappa = 22{,}5$ zum Schnitt $\varkappa = 25$. Die vier Schnittpunkte mit Doppelkurven verschwinden dann wieder beim Übergang vom Schnitt $\varkappa = 25$ zum Schnitt $\varkappa = 27{,}5$ und von diesem zum Schnitt $\varkappa = 30$ (Fig. 150).

Fig. 154a.

Fig. 154b.

Wollen wir noch einfacher alle Verhältnisse überblicken, so sei empfohlen, die Fig. 145, 150, 152 und 153 mit *farbigen Stiften zu bemalen,* so daß die glei-

chen Farben in den verschiedenen Figuren die einander entsprechenden Kurvenbogen und Flächenteile darstellen. Und zwar seien in der Fig. 145 die Strecken P_2B und DP_1 rot und grün, die Bogen A_2P_2 und A_1P_1 blau, die Bogen C_1P_2 und C_2P_1 gelb nachgezeichnet. In der Fig. 153 seien die vier Teile GPH, JPK, GPK und JPH bzw. rot, grün, blau, gelb angelegt und außerdem die Strecken BP, DP, AP und CP etwas stärker rot, grün, blau, gelb nachgezeichnet. In der Fig. 152 seien die Teile GP_2HB, JP_1KD, A_1P_1K und A_2P_2G, C_1P_2H und C_2P_1J rot, grün, blau, gelb angelegt und die Strecken P_2B und P_1D rot und grün nachgezeichnet. Endlich seien in der Fig. 150 in den Kurven der Koten 2,5 bis 20 die Bogen 1–3 und 2–4 (bei der Kurve für $\varkappa = 2{,}5$ also die Punkte B und D) rot und grün, in den Kurven der Koten 20 bis 37,5 die Bogen 1–4 und 2–3 (bei der Kurve für $\varkappa = 37{,}5$ also die Punkte C und A) gelb und blau angelegt. (In der Kurve der Kote 20 sind dann also die beiden Ufer der Kurve verschiedenfarbig angelegt.)

Wenn wir wollen, können wir auch noch den Rand des Möbiusschen Blattes in Fig. 146 und alle diesem Rande in den übrigen Figuren entsprechenden Kurven mit einer fünften Farbe nachzeichnen.

Um nun leicht die *punktweise eineindeutige Abbildung der projektiven Ebene* $\mathfrak{E}$ *auf unsere so gewonnene Fläche* $\mathfrak{F}$ überblicken zu können, wollen wir zunächst die Kurven der Fig. 152 in der $(\bar{x}, \bar{y})$-Ebene auch auf die Ebene $\mathfrak{E}$, die (x, y)-Ebene, übertragen. Die homogen geschriebenen Gleichungen (3) S. 201 gehen durch die Transformation (1 a, b, c) der Seite 188 über in die Gleichungen

$$c x^2 + (c - 1) y^2 + (c + 1) s^2 = 0 \tag{5}$$

oder in die unhomogenen Gleichungen

$$c x^2 + (c - 1) y^2 + (c + 1) = 0. \tag{5'}$$

Für $c = 0$ ergeben sich also die Ordinatenlinien $y = \pm 1$ mit ihrem Schnittpunkt P. Durch diese wird die ganze projektive Ebene in zwei Teile zerlegt, die bzw. den Anfangspunkt R und den Punkt Q enthalten (Fig. 155). Für $-1 < c < 0$ ergibt sich nach der Gleichung (5′) weiter eine Schar von Kegelschnitten innerhalb des ersten Teiles der (x, y)-Ebene. Diese Kegelschnitte haben auf der x- bzw. y-Achse die reellen Schnittpunkte

$$x = \pm \sqrt{\frac{c+1}{-c}} \quad \text{bzw.} \quad y = \pm$$

und in diesen Schnittpunkten bzw. in Q oder P sich schneidende Tangenten.

Für $0 < c < 1$ ergibt sich dagegen eine Schar von Kegelschnitten innerhalb des zweiten Teiles; diese Kegelschnitte haben auf der y-Achse die reellen Schnittpunkte $y = \pm \sqrt{\frac{c+1}{1-c}}$ mit sich in P schneidenden Tangenten und auf

der Geraden $s = 0$ die reellen Schnittpunkte $\frac{y}{x} = \nu = \pm\sqrt{\frac{c}{1-c}}$ mit sich in R schneidenden Tangenten. Hiernach sind diese Kegelschnitte für jeden gegebenen Wert c auch leicht zu zeichnen. Für $c = -1$ bzw. $+1$ ziehen sich die Kegelschnitte auf den Punkt R bzw. Q zusammen; der Punkt R entspricht also dem Punkte R und der Punkt Q den zugeordneten Punkten Q_1, Q_2 der Fig. 152. In der Fig. 155 sind diese Kegelschnitte für die Werte $c = 0, \pm\frac{1}{8}, \ldots, \pm\frac{7}{8}, \pm 1$ eingezeichnet, und zugleich sind die nach der Gleichung (4) S. 202 zugehörigen Koten $\varkappa$ hinzugefügt. Den Geraden

$$\bar{x} = \pm\sigma\cdot\bar{s}\left(\sigma = \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

der Fig. 152, denen ja der Rand des Möbiusschen Blattes der Fig. 146 entspricht, ist nach den Gleichungen (1a, b, c) S. 188 in der projektiven Ebene der Kegelschnitt zugeordnet

$$7x^2 - y^2 = 1. \quad (6)$$

Fig. 155.

Dieser schneidet die x-Achse in den Punkten B, D oder $x = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}$ mit sich im Punkte Q schneidenden Tangenten und die Gerade $s = 0$ in den Punkten C, A oder $\frac{y}{x} = \pm\sqrt{7}$ mit sich im Punkte R schneidenden Tangenten.

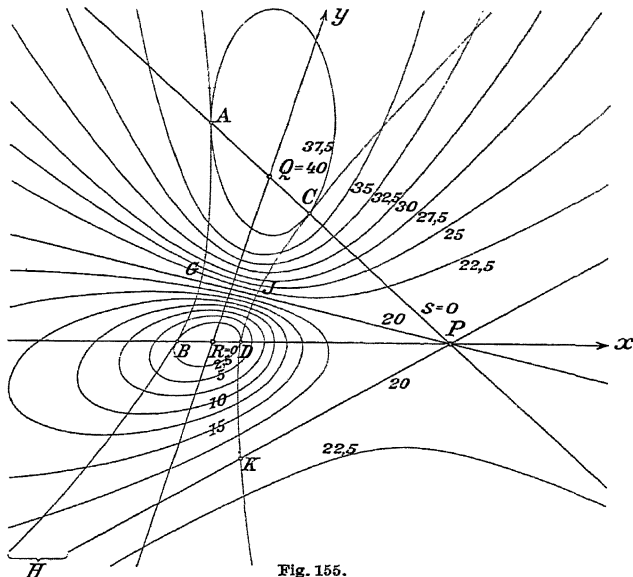
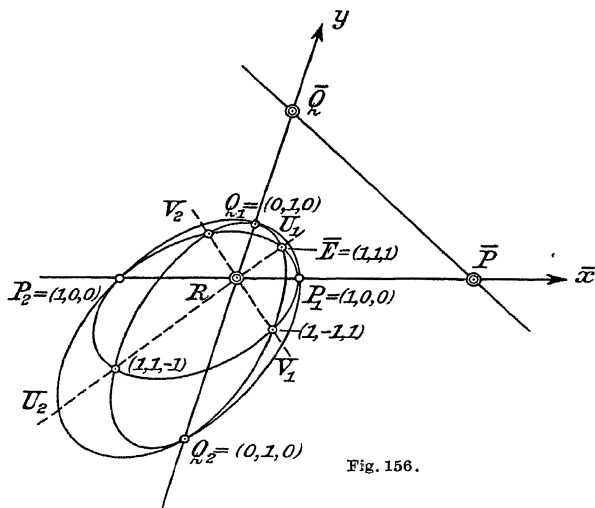
Alle Kegelschnitte der Gleichung (5′) können wir nun unmittelbar *allen* Schnitten der Fläche $\mathfrak{F}$ in den Ebenen durch die Gerade l zugeordnet denken, wie eben speziell die eingezeichneten Kegelschnitte der Fig. 155 den kotierten Kurven der Fig. 150 entsprechen sollen. Wir können nun weiter in der projektiven Ebene $\mathfrak{E}$ noch eine zweite Kurvenschar hinzunehmen, nämlich z. B. das Geradenbüschel durch den Punkt R. Dieses Geradenbüschel $\frac{y}{x} = \nu$ mit dem reellen Parameter ν überträgt sich dann durch die Gleichungen (1a, b, c) S. 188 sogleich auf das Geradenbüschel $\frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \nu$ der Fläche $\overline{\mathfrak{E}}$ (Fig. 145

und 152). Somit hat dann jeder Punkt dieser Fläche $\overline{\mathfrak{E}}$ zwei bestimmte Parameter $\varkappa$, ν, wobei umgekehrt jedem Wertepaare $\varkappa$, ν *zwei* Punkte entsprechen. (Den Geraden $\frac{y}{x} = \nu$ entsprechen dann in der Fläche $\mathfrak{E}'$ der (x', y')-Ebene, d. h. in den Fig. 149 und 153, die Kegelschnittsbogen $(1 + \nu^2)x'^2 + \nu^2 y'^2 = \nu^2$, welche die y'-Achse in denselben Punkten $y' = \pm 1$ oder R_1, R_2 schneiden und dort dieselben, nämlich durch den Punkt $(x', y', s') = (1, 0, 0)$ der x'-Achse gehende Tangenten haben.)

Fig. 156.

Jeder der Kegelschnittsbogen der Fig. 152 trägt also noch gleichsam eine Skala der zugehörigen Werte ν. Diese Werteskala können wir dann endlich auch auf die kotierten Kurven der Fläche $\mathfrak{F}$ (Fig. 150) übertragen. Es hat keinen Zweck, dies im einzelnen, etwa durch Vervollständigung der Figuren, noch auszuführen, was ja gar keine Schwierigkeiten bieten würde.

3. *Auf solche Weise läßt sich also die punktweise eineindeutige Zuordnung der projektiven Ebene $\mathfrak{E}$ und der konstruierten Fläche $\mathfrak{F}$ vollständig übersehen.*

Wir wollen aber noch folgende Bemerkung hinzufügen: Wie wir soeben das Strahlenbüschel $\frac{y}{x} = \nu$ auf die Fläche $\mathfrak{F}$ übertragen haben, so können wir ebenso auch jedes der Strahlenbüschel $\frac{x}{s} = \lambda$ und $\frac{y}{s} = \mu$ von der projektiven Ebene erst auf die Fläche $\overline{\mathfrak{E}}$ (vgl. die Fig. 156 als Ergänzung der Fig. 145 und 152) und die Fläche $\mathfrak{E}'$ und dann auf die Fläche $\mathfrak{F}$ übertragen. Damit aber haben wir dann auch das gesamte projektive (x, y, s)-Koordinatensystem selbst auf die Fläche $\mathfrak{F}$ übertragen. Wir können eben jetzt jedem Punkte der Fläche $\mathfrak{F}$ geradezu dieselben Koordinaten (x, y, s) erteilen, wie dem entsprechenden Punkte der Ebene $\mathfrak{E}$ (projektives Koordinatensystem auf der Fläche $\mathfrak{F}$).

Als Endergebnis haben wir dann die Tatsache erhalten:

4. *Die Punkte der Fläche $\mathfrak{F}$ und die Koordinatentripel (x, y, s) sind ebenfalls eineindeutig und stetig einander zugeordnet.*

Neunter Abschnitt.

Ein anderes Erweiterungsaxiom.

§ 34. Die biprojektive Ebene.

Wir wollen einen Blick zurückwerfen zu dem S. 33 aufgestellten *Erweiterungsaxiom.* Nämlich wir wollen jetzt einmal dieses Axiom durch das folgende ersetzen:

1. Wir nehmen an, daß je zwei Geraden (des Raumes) sich in zwei Punkten O_1, O_2 schneiden. Von diesen kann jeder unabhängig voneinander ein eigentlicher oder uneigentlicher Punkt sein.

Während wir alle übrigen eingeführten Axiome als „Erfahrungsaxiome" bezeichnen können, werden wir das Erweiterungsaxiom als ein „hypothetisches" Axiom bezeichnen, da keinerlei unmittelbare Anschauung oder Erfahrung hier hineinspielt.

Wir können uns leicht einen Überblick über die neuen Verhältnisse schaffen, wenn wir folgende Analogie betrachten: Es sei im euklidischen Raume eine *Kugel* gegeben. Wir wollen nun die größten Kreise der Kugel vergleichsweise als „Pseudogeraden" bezeichnen. Dann erkennen wir leicht: Für die Punkte und Pseudogeraden der Kugel gelten als Sätze der euklidischen Geometrie der Kugel, der sphärischen Geometrie, dieselben Aussagen, welche wir als Axiome für die Punkte und Geraden der Ebene eingeführt haben. Ferner gilt auch der Desarguessche Satz auf der Kugel, jetzt jedoch in der Form:

2. Gehen die Verbindungslinien entsprechender Ecken zweier Dreiecke (sphärischer Dreiecke) ABC und $A'B'C'$ durch dieselben beiden Punkte O_1, O_2, so liegen die Schnittpunktpaare P_1, P_2; Q_1, Q_2 und *R_1, R_2 entsprechender Seiten auf derselben Pseudogeraden und umgekehrt.*

In unserem Raum können wir nun leicht zeigen:

3. Alle von einem Punkte O_1 ausgehenden Geraden schneiden sich noch in demselben Punkte O_2.

Es seien etwa in einem begrenzten Gebiete der Ebene $\mathfrak{E}$ zwei innere Geraden g, h gegeben und wir legen durch jede von ihnen eine neue Ebene. Diese neuen Ebenen mögen sich in der Geraden l schneiden. Dann ist leicht zu sehen, daß auch die Gerade l durch die Schnittpunkte O_1, O_2 der Geraden g, h hindurchgeht. Legen wir weiter durch die Gerade l noch eine Ebene mit der Schnittgeraden k in der Ebene $\mathfrak{E}$, so geht auch k stets durch die Punkte O_1, O_2 hindurch.

Wir können die zusammengehörenden Schnittpunkte O_1, O_2 zweier Geraden als „*diametrale Punkte*" bezeichnen.

Man erkennt jetzt auch leicht:

4. Durch die Möbiussche Netzkonstruktion in der Ebene erhalten wir ein (x, y, s)*-Koordinatensystem der Art, daß je zwei diametrale Punkte dieselben Koordinatentripel bekommen.*

Jetzt findet also nicht mehr ein eineindeutiges Entsprechen zwischen den Punkten der Ebene und den verschiedenen Koordinatentripeln (x, y, s) statt.

Wir übersehen diese Verhältnisse am besten, wenn wir auch einmal *auf der euklidischen Kugel ein projektives Koordinatensystem durch die entsprechende Möbiussche Netzkonstruktion einführen.* Wir können z. B. ein dreifach rechtwinkliges Dreieck der Erdkugel, das durch den Äquator und die Meridiane mit den geographischen Längen 0° und 90° östlich ausgeschnitten wird, als Fundamentaldreieck PQR und einen Punkt E im Innern als Einheitspunkt zum Ausgangsgebilde der Netzkonstruktion wählen. Umlaufen wir dann etwa den Äquator von W nach O, d. h. die x-Achse, so nehmen die Abszissen der Punkte von 0 bis $+\infty$, darauf von $-\infty$ bis 0 und dann wieder von 0 bis $+\infty$ und von $-\infty$ bis 0 zu, bis wir zum Ausgangspunkt zurückgelangt sind. Überhaupt haben je zwei Antipodenpunkte der Kugel dieselben projektiven Koordinaten.

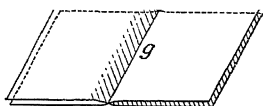



Fig. 157.

Dementsprechend wollen wir jetzt von der *biprojektiven Ebene* (und dem *biprojektiven Raum*) sprechen. Diese biprojektive Ebene ist dann natürlich eine zweiseitige Fläche im Gegensatz zu der einseitigen projektiven Ebene, entsprechend der Kugelfläche. Wir wollen noch folgendes in dieser Hinsicht hervorheben: Wir denken zwei gewöhnliche projektive Ebenen übereinandergelegt und jede längs derselben Geraden g eingeschnitten, wodurch ja die einzelne Ebene nicht zerfällt, dann aber die beiden Ufer der Schnitte *kreuzweis* miteinander vereinigt (Fig. 157). Dann entsteht die in sich geschlossene, singularitätenfreie doppelte projektive Ebene, die natürlich eine zweiseitige Fläche darstellt. Je zwei übereinanderliegende Punkte der doppelten Ebene sollen dann dieselben projektiven Koordinaten (x, y, s) besitzen. Wir können dann leicht übersehen:

5. Die biprojektive Ebene läßt sich eineindeutig auf diese doppelte projektive Ebene und auch auf die euklidische Kugelfläche abbilden.

Nebenbei sei noch folgendes bemerkt:

Wir denken uns ein Strahlenbündel des euklidischen Raumes mit dem Träger M gegeben und nennen jeden Vollstrahl einen „Pseudopunkt", jede Ebene durch M eine „Pseudogerade". Dann gelten für diese Pseudopunkte und Pseudogeraden dieselben Aussagen als Sätze der euklidischen Geometrie, welche wir als Axiome für die Punkte und Geraden der projektiven Ebene ein-

geführt haben, einschließlich des Erweiterungsaxioms 5 S. 33. Wenn aber jeder von M ausgehende *Halbstrahl* als Pseudopunkt bezeichnet wird, so tritt jetzt die Aussage des Erweiterungsaxioms 1 S. 207 als ein Satz ein (wobei natürlich die Worte „Gerade“ und „Punkt“ durch die Worte „Pseudogerade“ und „Pseudopunkt“ zu ersetzen sind). Hier haben wir also eine neue eigenartige Veranschaulichung der ganzen projektiven bzw. biprojektiven Ebene. Wenn der Punkt M der Mittelpunkt der oben eingeführten Kugel ist, haben wir natürlich wieder auch die engste Beziehung zu der sphärischen Geometrie.

Wir wollten die Eigenart der biprojektiven Ebene nur kurz hervorheben, wesentlich aus dem Grunde, um zu zeigen, daß keineswegs das von uns S. 33 eingeführte Erweiterungsaxiom das einzig mögliche ist.[1])

Wir wollen für die biprojektive Ebene vielleicht nur noch folgende Sätze herausgreifen:

6. Jede Gerade der biprojektiven Ebene wird durch eine lineare Gleichung in den projektiven Koordinaten dargestellt, und umgekehrt stellt jede lineare Gleichung eine (aus einem einzigen Linienzug bestehende) Gerade dar.

7. Eine hyperbolische Involution auf einer Geraden z. B. besitzt vier reelle Doppelpunkte.

8. Jeder reellen, nicht zerfallenden Gleichung zweiten Grades, die eine reelle Kurve darstellt, entspricht ein aus zwei Linienzügen bestehender Kegelschnitt, ein „Doppelkegelschnitt“.

---

1) Es sei auch auf die allgemeinen Flächen konstanter positiver oder negativer Krümmung überhaupt hingewiesen, z. B. auch auf die Pseudosphäre, Flächen, auf denen wir, analog wie auf der Kugel, projektive Koordinatensysteme nach der Möbiusschen Netzkonstruktion aufstellen können, wobei die geodätischen Linien die „Pseudogeraden“ sind, und die, wie wir noch bemerken, vor allem auch für den Vergleich mit der nichteuklidischen Geometrie in der projektiven Ebene ihre Bedeutung haben. Näheres wolle man z. B. meinem besonderen Buche entnehmen: „Die Pseudosphäre und die nichteuklidische Geometrie“. Die beiden bisher genannten Erweiterungsaxiome sind etwa auch keineswegs die einzig möglichen. Man vergleiche in dieser Hinsicht ferner auch die sogenannten Clifford-Kleinschen Raumformen, z. B. in dem Buche: F. Klein, Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie, Berlin 1928, S. 256ff. und S. 264ff., sowie die Arbeiten von Herrn P. Koebe, Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen, Sitzungsberichte der Preuß. Akad. d. Wiss., Phys.-Math. Klasse 1927—1928, XXIII, 3 Mitteilungen, S. 164, 345 u. 385.

Namenverzeichnis zu Band I und II.

[Die großen Ziffern geben die Bandzahlen, die kleinen die Seitenzahlen wieder, wobei die kleinen römischen Ziffern sich auf das Vorwort beziehen.]